大　学

数学系

自学丛书

数学分析



SHUXUEFENXI

大学数学系 自学丛书

空间解析几何　高等几何
高等代数　计算方法
数学分析　概率论与数理统计
常微分方程　近世代数
复变函数论　微分几何
实变函数论　电子计算机与算法语言BASIC

统一书号：7090·243
定　价：2.70 元

大学数学系自学丛书

数 学 分 析

（上册）

李世金　陈广义　主编

辽 宁 人 民 出 版 社
一九八四年·沈阳

数学分析（上）

李世金
陈广义 主编

辽宁人民出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳市第一印刷厂印刷

字数：530,000　开本：850×1168 $\frac{1}{32}$　印张：$20\frac{3}{4}$

印数：1～14,000

1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷

责任编辑：鸿　宾　封面设计：安今生

统一书号：7090·243　定价：2.70元

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　　录

第一章 函　　数

函数是变量与变量之间相互依赖关系的一种数学抽象．它不仅是中学数学的重要组成部分，而且也是数学分析要研究的主要对象．在这一章里，我们将在中学数学的基础上进一步讨论函数概念，以及函数的重要性质．

§1.1 实　　数

由于数学分析是在实数范围内讨论的，因此，在这一节里，我们将简要地复习实数及其性质．

一　实　　数

1　实数的组成

数是计数和度量的结果．在度量中，当被度量的量是单位量的整数倍时，则度量的结果将得到**整数**；当被度量的量与单位量可通约时，则度量的结果将得到**分数**；当被度量的量与单位量不可通约时，则度量的结果将得到**无理数**．例如，正方形的对角线的长度与每边的长度是不可通约的，度量的结果将得到无理数$\sqrt{2}$．圆的周长与其直径的长度也是不可通约的，度量的结果将得到无理数π。

正、负整数与正、负分数，连同零，统称为**有理数**．任何有理数均可表示成分数$\frac{p}{q}$的形式，其中p是整数q是正整数．由于有理数可化为无限十进循环小数，而任何无限十进循环小数

又可以化为有理数，因此也常用无限十进循环小数来表示有理数。与此同时，无理数可用无限十进非循环小数表示。当我们按一定规则能写出一个无限非循环小数的任意位数时，这个无理数就是已知的。

有理数和无理数统称为**实数**。

2　实数的运算

对实数可进行加、减、乘、除（除数不为零）四则运算，并且对任意两个实数进行四则运算的结果仍是实数。

3　实数的性质

实数的有序性　任意两个实数a,b,必满足下述关系之一：

$a<b$，$a=b$，$a>b$。

实数的传递性　a,b,c是任意实数，如果有$a\leqslant b$，$b\leqslant c$,则$a\leqslant c$。

实数的稠密性　在任意两个不同实数之间存在着无穷多个有理数和无理数。

实数的连续性　实数与数轴上的点是一一对应的，即任一实数在数轴上必有唯一的一点与之对应，反之，数轴上任一点也必有唯一的一个实数与之对应。这样一来，全体实数在数轴上所对应的所有点无空隙地充满了整个数轴。因此，从几何上反映出实数的连续性。在数轴上，把有理数所对应的点叫做**有理点**，把无理数所对应的点叫做**无理点**。

实数的阿基米德性　对于任意两个正实数a与b，存在自然数n，使得$nb>a$。

二　数　集

1　集合

在现代数学中，集合是一个最基本的概念。为了研究问题的需要，现叙述如下：具有某种特定性质（具体的或抽象的）的对象的全体称为**集合**（简称**集**），组成集合的对象称为这个集合的**元素**。由数组成的集合称为**数集**。例如，自然数全体组

成了自然数集；有理数全体组成了有理数集；实数全体组成了实数集；平面上一切点的全体组成了平面点集等等。

对于给定的集合来说，可以判定任何一个对象或是这个集合的元素，或不是这个集合的元素，二者必具其一。如果 a 是集 A 的一个元素，就记作 $a\in A$，读作 a 属于 A。如果 a 不是集 A 的元素，就记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A。例如，如果 A 是偶数集，则 $2\in A$，而 $5\overline{\in} A$。

2　集合的表示

有的集合可以用列举其元素的方法来表示。例如，集合 A 是由元素 1，2，5，6 四个自然数组成，将记作

$$A=\{1,2,5,6\}.$$

有的集合也可以用其元素具有性质 $\boldsymbol{P}$ 来表示。集合 A 的元素具有性质 $\boldsymbol{P}$，将集合 A 表示为

$$A=\{x|\ x\ \text{具有性质}\boldsymbol{P}\}.$$

在 $\{\cdots\cdots\}$ 中，“$|$”之前表示集合 A 是由元素 x 组成，“$|$”之后表示其元素 x 所具有的性质。例如：

$$A_1=\{n\ |n=1,2,3,\cdots\cdots\},$$

$$A_2=\{x\ |x^2-5x+6=0\},$$

$$A_3=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\},$$

分别表示 A_1 是自然数集，A_2 是方程 $x^2-5x+6=0$ 根的集，A_3 是以原点为心的单位圆内所有点组成的集。

凡是含有有限个元素的集合叫做有限集，上述集合 A_2 是个有限集。在有限集中，仅含一个元素的集合叫做**单元集**。例如，A 是方程 $2x-6=0$ 根的集就是单元集，即

$$A=\{x\ |2x-6=0\}\ \text{或}\ A=\{3\}.$$

非有限集叫做无限集，上述集合 A_1 和 A_3 都是无限集。

为了研究问题的需要，把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 ϕ。例如，A 是方程 $x^2+1=0$ 实根的集，A 就是空集，即 $A=\phi$。

3　集合的关系

两个集A与B，若集A的所有元素都属于集B，则称集B包含着集A或A是B的子集，记作$A\subset B$。若$A\subset B$，而B中存在元素b不属于A，则称A是B的**真子集**。例如N是自然数集，Z是整数集，N是Z的真子集。

两个集A，B，如果$A\subset B$，$B\subset A$，则称A与B**相等**，记作$A=B$。

4 集合的运算

属于A或属于B的所有元素所组成的集合称为A和B的**并集**，记作$A\cup B$。

既属于A又属于B的所有元素所组成的集合，称为A和B的**交集**，记作$A\cap B$。

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，那么$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$。

5 区间和邻域

在数学分析中我们最常用的数集是区间和邻域。

设a,b为两个实数，且$a<b$。

数集$\{x\mid a<x<b\}$叫做**开区间**，记作(a,b)。在数轴上，它表示介于a,b两点间的所有点，但端点a和b不包括在内。

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$叫做**闭区间**，记作$[a,b]$。在数轴上，它表示介于$a,b$两点间的所有点，且端点$a$和$b$包括在内。

把数集

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$或$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$。叫做**半开区间**。

除了上述那些有限区间外，还有无限区间

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}.$$

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\text{是一切实数}\}.$$

设δ为正数，a为某一个实数，把以点a为心以δ为半径的开区间

$$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

叫做点a的δ邻域，用记号$U(a,\delta)$表示。

§1.2 绝对值不等式

在数学分析中，绝对值及其不等式是常用的工具之一。下面将给出绝对值的定义，并讨论其性质：

定义 某一数a的绝对值用记号$|a|$表示，由

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\geqslant 0\text{时},\\ -a, & \text{当}a<0\text{时}\end{cases}$$

来定义。即，若$a\geqslant 0$，那么a的绝对值就是它本身a，若$a<0$，那么a的绝对值就是它的相反数$-a$。

在数轴上，数a的绝对值$|a|$表示点a与原点O之间的距离。

根据绝对值的定义，对任一数a，不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \tag{1.1}$$

总成立。事实上，如果$a\geqslant 0$，就有$-|a|\leqslant a=|a|$；如果$a<0$，就有$-|a|=a<|a|$。因此，对任一数a，(1.1)式总是成立的。

绝对值具有如下性质：

性质1 $|a|\leqslant b$ $(b>0)$成立的充要条件是$-b\leqslant a\leqslant b$。

证明 **必要性** 已知$|a|\leqslant b$，求证$-b\leqslant a\leqslant b$。将不等式

$$|a|\leqslant b \tag{1.2}$$

两边乘以-1，得

$$-b\leqslant -|a|.$$

再应用(1.1)和(1.2)式，得

$$-b\leqslant -|a|\leqslant a\leqslant |a|\leqslant b.$$

于是，不等式

$$-b\leqslant a\leqslant b$$

成立。

充分性 已知$-b\leqslant a\leqslant b$，求证$|a|\leqslant b$。

分两种情况证明：

如果 $a\geqslant 0$，则$a=|a|$，从而有$|a|\leqslant b$。

如果$a<0$，则$-a=|a|$。由已知的不等式$-b\leqslant a$，两边乘以-1，得

$$-a\leqslant b.$$

于是，有

$$|a|=-a\leqslant b. \qquad \square$$

同理可证，$|a|<b$ $(b>0)$成立的充要条件是

$$-b<a<b.$$

性质1表明，不等式$|a|\leqslant b$与$-b\leqslant a\leqslant b$是等价的。当$\delta>0$时不等式$|x-x_0|<\delta$与$x_0-\delta<x<x_0+\delta$也是等价的，这是数学分析中经常使用的不等式。

性质2 $|a|\geqslant b$ $(b>0)$成立的充要条件是

$$a\geqslant b \quad 或 \quad a\leqslant -b.$$

证明 **必要性** 已知$|a|\geqslant b$，求证$a\geqslant b$或$a\leqslant -b$。

如果$a>0$，则$|a|=a$，得$a\geqslant b$。

如果$a<0$，则$|a|=-a$，得$-a\geqslant b$，两边同乘以-1，得$a\leqslant -b$。

充分性 已知$a\geqslant b$或$a\leqslant -b$，求证$|a|\geqslant b$。

如果$a\geqslant b>0$，则$|a|=a$，得$|a|\geqslant b$。

如果$a\leqslant -b<0$，则$|a|=-a$，从而有

$$|a|=-a\geqslant b. \qquad \square$$

性质3 和的绝对值不大于每个数的绝对值的和，即

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

证明 由(1.1)有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

将两个不等式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

由性质1有

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|. \qquad \square$$

由性质3可直接推得

$$|a-b| = |a+(-b)| \leqslant |a| + |b|.$$

性质 4　差的绝对值不小于两数绝对值的差，即

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

证明　由于$a=(a-b)+b$，根据性质 3，有

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|.$$

移项后得

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|. \qquad \square$$

由性质 4 可直接推得

$$|a+b| = |a-(-b)| \geqslant |a| - |-b| = |a| - |b|.$$

性质 5　积的绝对值等于各因数绝对值的积，即

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|.$$

性质 6　商的绝对值等于被除数及除数的绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}(b\neq 0).$$

性质 5 和性质 6 显然成立。

用数学归纳法可以把性质 3 和性质 5 推广到任意有限数的情形：

$$|a+c+d+\cdots+k| \leqslant |a| + |b| + |c| + \cdots + |k|.$$

$$|a\cdot b\cdot c\cdot\cdots\cdot k| = |a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots\cdots|k|.$$

例 1　解不等式　$|x-10| < \frac{1}{1000}$.

解　由性质 1，有

$$-\frac{1}{1000} < x-10 < \frac{1}{1000},$$

$$10-\frac{1}{1000} < x < 10+\frac{1}{1000},$$

$$10-0.001 < x < 10+0.001,$$

$$9.999 < x < 10.001.$$

例 2　解不等式　$|2x+4| > 10$.

解　由性质 2，有

$$2x+4>10 \quad 或 \quad 2x+4<-10.$$

分别解得

$$x>3 \quad 或 \quad x<-7.$$

例 3 解不等式 $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$.

解 当$\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0$时，原不等式为

$$\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}.$$

因这个不等式对任意x都不成立，故此时无解。

当$\frac{x-2}{x+1}<0$时，原不等式为

$$-\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1},$$

即 $$2\ \frac{x-2}{x+1}<0.$$

因此解不等式

$$\frac{x-2}{x+1}<0$$

就可以了。

当$x-2<0$，$x+1>0$时，解得$-1<x<2$；

当$x-2>0$，$x+1<0$时，此时无解．于是，原不等式的解是开区间$(-1,\ 2)$.

例 4 解不等式$|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解 由于不等式里含有$|x+2|$和$|x-2|$的项，当考虑$x+2$与$x-2$的符号时，自然要把实数轴分为三个区间：

$$(-\infty,-2),\ [-2,2],\ (2,\ +\infty).$$

当$x\in(-\infty,-2)$时，原不等式为

$$-(x+2)-(x-2)\leqslant 12.$$

从中解得$x\geqslant-6$，故其解为$(-\infty,\ -2)\cap[-6,+\infty)=[-6,\ -2)$.

当$x\in[-2,2]$时，原不等式为

$$(x+2)-(x-2)\leqslant 12.$$

整理得$4\leqslant 12$，此时表明当$x\in[-2,2]$时原不等式恒成立，故$[-2,2]$也是原不等式的解。

当$x\in(2,+\infty)$时，原不等式为

$$(x+2)+(x-2)\leqslant 12,$$

解得$x\leqslant 6$，故此时其解为$(2,+\infty)\cap(-\infty,6]=(2,6]$。

于是，原不等式的解为

$$[-6,-2)\cup[-2,2]\cup(2,6]=[-6,6].$$

§1.3 函　数

一　常量与变量

当我们观察自然现象时，常常遇到各种不同的量。例如：长度、重量、压力、温度、速度、降雨量、光照时间等等。并且各种量在过程中有着不同的状态：有的量在过程进行中保持不变，有的量在过程进行中每时每刻都在变化。

在过程中，我们把数值保持不变的量叫做**常量**，而数值变化的量叫做**变量**。

例如，在圆的半径变化过程中，圆的面积和周长都是变量，而周长与其直径的比值是不变的。这个比值就是我们熟知的圆周率π。

然而，常量与变量又是相对的，它们依赖于过程和条件。同一个量在某种情况下可能是常量，而在另一种情况下可能是变量，所以在一定的条件下它们之间是可以相互转化的。例如，在地球表面上测量物体的重力加速度。如果测量工作在同一高度不同地点进行，那么重力加速度是常量，如果测量工作在同一地点不同高度进行，那么重力加速度不是常量，而是变量。

通常用字母

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w,\ t,\cdots\cdots$$

表示变量．而用字母

$$a,\ b,\ c,\ d,\cdots\cdots$$

表示常量．

二　函数概念

在某一过程中，会遇到许多变量，这些变量在过程中不是孤立进行的，而是相互依赖的．

例 1　一辆汽车以每小时60公里的等速在公路上行驶，汽车所走的路程 S 与时间 t 有如下关系．

$$S=60t\ \ (t\geqslant0).$$

路程S与时间 t 这两个变量按照规律$S=60t$相互依赖着．当$t=0$时，$S=0$；当$t=5$时，$S=300$．这就是说，对于时间 $t(t\geqslant0)$ 每取一个值，依规律$S=60t$ 都有唯一确定的路程 S 与之对应．

例 2　圆的面积A与它的半径r之间的相依关系为

$$A=\pi r^2\ \ (r\geqslant0).$$

A是依着规律πr^2随着r的变化而变化，当$r=1$时，$A=\pi$；当$r=7$时，$A=49\pi$．这就是说，$r(\geqslant0)$每取一个值，按照规律 $A=\pi r^2$都有唯一确定的面积A与之对应．

例 3　某货运公司1978年六月份上半月的货物周转量记录如下表

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
货物周转量（千吨公里）	2030	2002	2067	2075	2050	2052	2015	2070	2120	2110	2087	2182	2130	2217	2197

从表中可以看出，货物日周转量是随着日期的变化而变化．如第三天的货物周转量为 2067，第九天的货物周转量为2120等等．总之，在周转量记录表上，每天都有唯一确定的货物周转量与之对应．

例 4　某气象站用自动记录仪，记录了某地某日24小时气温的变化情况，如图1.1示. 其中横坐标轴表示时间t，纵坐标轴表示温度T.

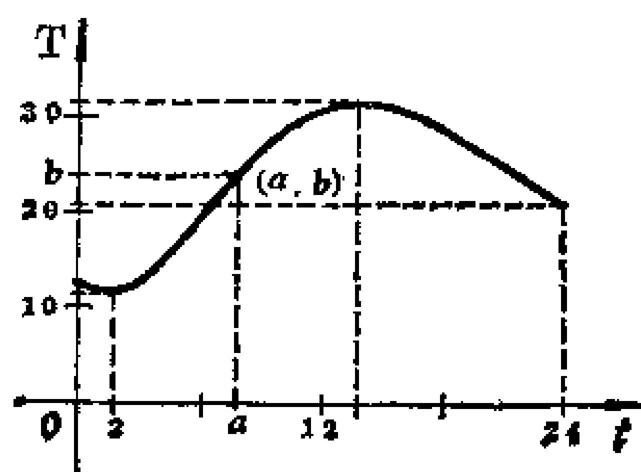


图1.1

图 1.1 中的温度曲线表示了温度与时间之间的依赖关系. 当$t=a$时，在曲线上可查得唯一确定的温度b与之对应.

上述四例，由于所研究的对象不同，因此，变量之间的表达形式也不相同. 但是它们都有一个共同点，就是其中的一个变量在某个范围内变化时，另一个变量按着某种对应规律也随着变化. 当一个变量在某个范围内取某个值时，另一个变量有唯一确定的值与之对应.

定义　设有两个变量x和y，变量x的取值范围为数集X. 如果在X内所取的每一个值x，按着某一种确定的对应规律，都有唯一确定的实数y与之对应，则称y是变量x的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中x叫做**自变量**，而y叫做**因变量**. 自变量x取值的范围X叫做该函数的**定义域**.

为了更好地理解函数的定义，现说明如下：

1　对应规律

函数$y=f(x)$中的符号"f"，表示自变量x与因变量y之间的对应规律。

在例 1 中，$S=60t$. 当然可以写成$S=f(t)=60t$. 这时不应当把f理解为60，而是函数S与自变量t成正比的关系，其中60是比例系数.

在例 2 中，圆的面积是其半径r的函数，可写成$A=f(r)=\pi r^2$. 这里的f应当理解为圆的面积A与半径r的平方成

正比的关系，其中π是比例系数。

在例 3 和例 4 中，函数的对应规律“f”不是用解析式给出的，而是用列表和图象的方法给出的。

由于对应规律“f”只是一个符号，因此也可以用其它字母表示，如

$$y=F(x),\ y=h(x),\ y=g(x),\ y=\varphi(x)\ \text{等等。}$$

尤其在同一个问题中有几个不同的函数，其对应规律就要用不同的符号表示。

2　函数定义域

在实际问题中，自变量的取值范围总要根据实际问题的意义来确定，因此它常常是有一定限制的。例如，在例 1 和例 2 中，从函数解析式看，自变量 t 和 r 的取值范围可以是 $(-\infty,+\infty)$，但是从实际问题的意义来说，时间t与半径r的取值范围都应当是从 0 到正无穷大，即它们的定义域都是$[0,\ +\infty)$。

如果函数 $y=f(x)$是由一般的解析式给出的，那么它的定义域就是在实数集内使 y有意义的那些x 的全体。例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。因为负数开平方在实数范围无意义，所以使 y有意义的x满足不等式$1-x^2\geqslant0$，即

$$1-x^2=(1+x)(1-x)\geqslant0。$$

两个因式必须同号

$$\begin{cases}1+x\geqslant0\\1-x\geqslant0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}1+x\leqslant0\\1-x\leqslant0\end{cases}.$$

解得　$-1\leqslant x\leqslant1$，即这个函数定义域是闭区间$[-1,1]$。

3　函数的值域

在函数 $y=f(x)$ 的定义域X中任意一点x_0，按照对应规律所对应的y，记作 $f(x_0)$，叫做在点x_0的函数值，有时也用 $y|_{x=x_0}$表示。

设函数 $y=f(x)$的定义域为X，对于X中的每一个值 x，都对应一个确定的函数值 y，函数值的全体叫做该函数的值域，记作Y，即

$$Y=\{y|y=f(x),\ x\in X\}.$$

例如，函数$y=\sqrt{1-x^2}$的值域是

$$[0,\ 1]=\{y|y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]\}.$$

且当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，函数值为

$$y=\sqrt{1-x^2}\ \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

三　函数的图象

如果 $y=f(x)$是定义在X上的一个函数．在平面上建立直角坐标系Oxy,对于X中的每一个 x，都确定坐标平面上的一点$p(x,y)$。当x取遍X中的所有值时，在坐标平面上的点集$\{(x,y)|y=f(x),\ x\in X\}$称为函数 $y=f(x)$的**图象**.

当函数 $y=f(x)$的定义域X是一个区间时，通常函数 $y=f(x)$的图象是坐标平面上一条曲线。

例如，在例1中函数的图象是包括原点的半直线（如图1.2）．在例 2 中函数的图象是包括原点的平方抛物线（如图1.3）．而函数$y=\sqrt{1-x^2}$的图象就是在区间$[-1,1]$上的上半圆周（如图1.4）．

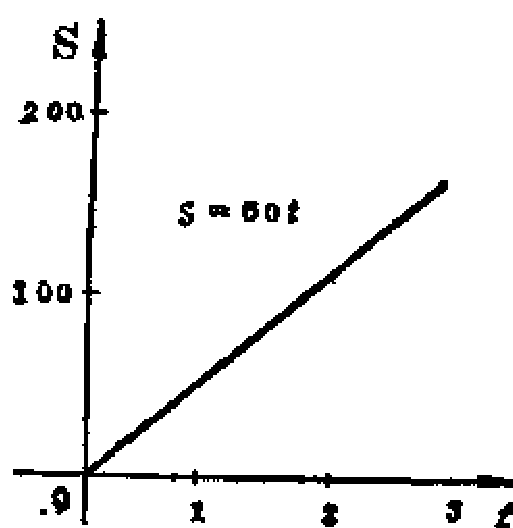


图1.2

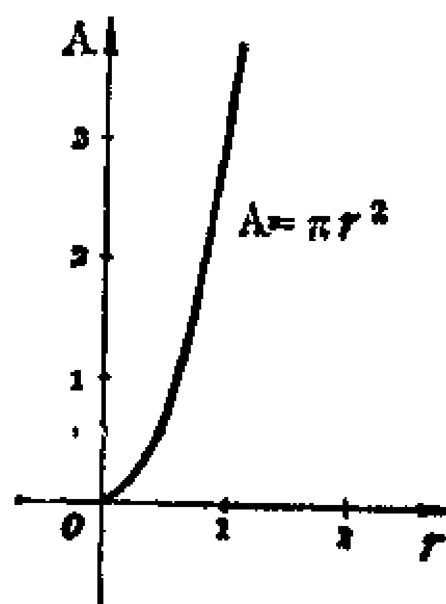


图1.3

总之，将函数 $y=f(x)$ 的图象描绘出来，使我们对函数有个直观形象的认识，进而有助于我们掌握函数的各种性态。

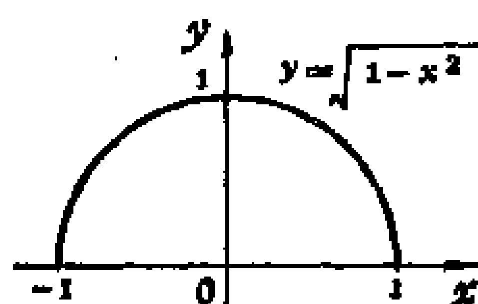


图1.4

§ 1.4 函数举例

为了进一步理解函数的概念，以及以后各章的需要，现举例如下。

一 函数举例

例1 设有一克冰，其温度为 $-10°C$，给以均匀加热使它化成其温度为10°C的水。在这一过程中，求冰从热源吸收热量随温度的变化规律。

解 设温度用 t 表示，热量用 Q 表示。

当开始加热时，冰的温度为 $-10°C$，此时冰从热源吸收的热量 Q 是零。因为冰比热为0.5，因此温度上升到 $t\in[-10,0)$ 度时，吸收的热量是

$$
\begin{aligned}
Q&=[t-(-10)]\times 0.5\\
&=(t+10)\times 0.5\\
&=0.5t+5.
\end{aligned}
$$

这就是在区间 $[-10,0)$ 上热量的变化规律。

当冰的温度达到 0 °C时，冰开始融化，一直化成 0 °C的水。在这个过程中，它还要吸收热量，但是温度不升高，所吸收的热叫做融化热。实验表明，一克的冰化成水所需的融化热为80卡。因为冰的温度刚升到 0 °C时，所吸收的热量为 5 卡，当全部化成 0 °C的水以后，共吸收热量增加到85卡，因此在 $t=0$ 时热量的变化有了跃度。

当温度继续上升时，由于水的比热是 1，因此温度上升到

$t\in(0,10]$度时，吸收的热量是

$$Q=85+t.$$

这就是在区间$(0,10]$上热量的变化规律。

综上所述，Q与t的对应规律是

$$Q(t)=\begin{cases}0.5t+5, & 当-10\leqslant t<0时,\\ t+85, & 当0<t\leqslant 10时.\end{cases}$$

函数$Q(t)$在$t=0$处没有定义，因为此时热量Q不能确定。函数$Q=Q(t)$的图象如图1.5示。

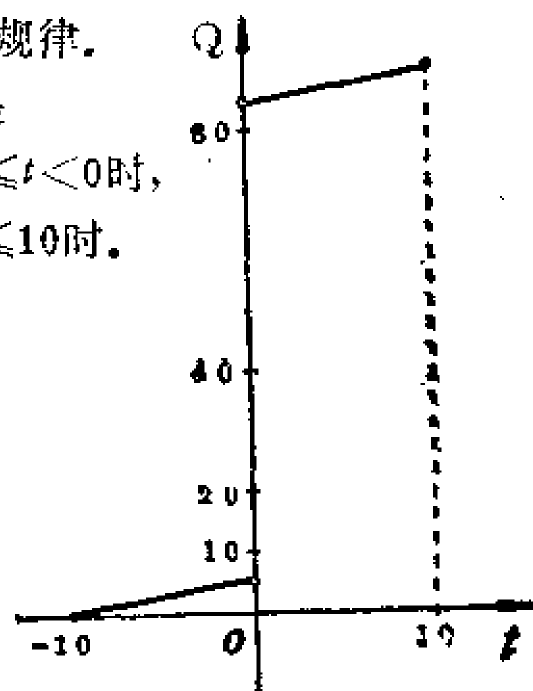


图1.5

例1启发我们，一个函数的定义域可能是若干个区间，函数在这些区间上分别用不同的解析式表示。

例2　我们规定：当$x>0$时，令$y=1$；当$x=0$时，令$y=0$；当$x<0$时，令$y=-1$。根据函数的定义，它是定义在实数集$(-\infty,+\infty)$上的函数。因为对任意实数x都对应y的唯一确定值。此函数叫做**符号函数**（如图1.6），记为$y=\operatorname{sgn}x$，即

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0时,\\ 0, & 当x=0时,\\ -1, & 当x<0时.\end{cases}$$

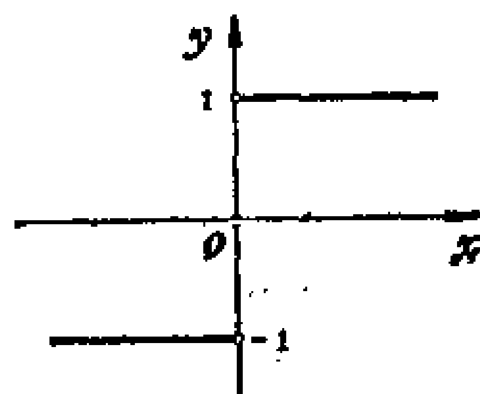


图1.6

例3　y代表不超过x的最大整数。用记号$y=[x]$表示，叫做x的整数部分。根据函数的定义，它是定义在实数集$(-\infty,+\infty)$上的函数。因为对任意实数x都对应着y的唯一确定值。例如：$[-3.9]=-4$，$[-0.125]=-1$，$[0]=0$，$[1.25]=1$，$[\pi]=3$，$[6]=6$等等。其图象如图1.7示。

y代表x的小数部分，可表为

$$y=\{x\}=x-[x].$$

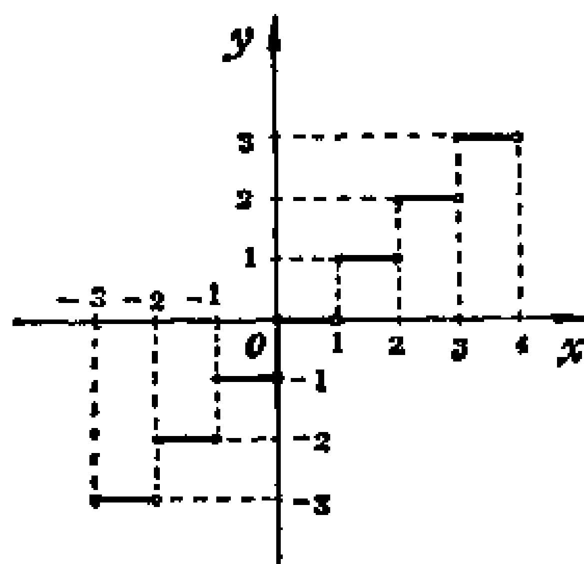


图1.7

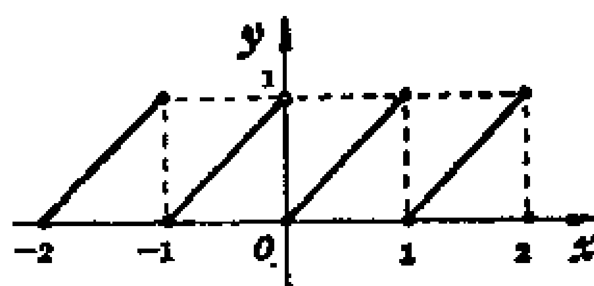


图1.8

根据函数的定义，它也是定义在实数集（$-\infty, +\infty$）上的一个函数。因为对任意实数x都对应着y的唯一确定值。例如：

$$\{2.5\}=2.5-2=0.5,$$
$$\{3.14\}=3.14-3=0.14,$$
$$\{-4.12\}=-4.12-(-5)=0.88 \text{ 等等。}$$

函数图象如图1.8示。

例 4　令

$$y=\begin{cases}|x|, & \text{当}x\neq 0\text{时},\\ 1, & \text{当}x=0\text{时}.\end{cases}$$

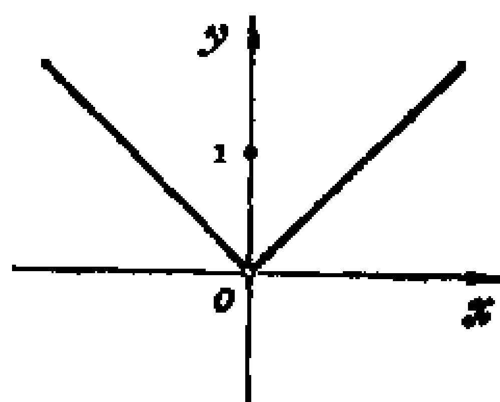


图1.9

根据函数定义，它是定义在实数集（$-\infty, +\infty$）上的函数。

函数图象如图1.9示。

例 5　当x是有理数时，令$y=1$；当x是无理数时，令$y=0$。根据函数定义，它是定义在实数集（$-\infty, +\infty$）上的函数，记为$y=D(x)$，叫做狄利克莱①函数，即

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}.\end{cases}$$

① 狄利克莱：Dirichlet, P.G.L，德国数学家，1805—1859年。

由于有理点和无理点在实数轴上是稠密的，故狄利克莱函数的函数图象在几何上无法精确地画出。

例 6　现在研究黎曼[①] 函数，为了使问题简化，仅限于在区间(0，2)上讨论。它的定义如下

$$y=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{当 } x=\frac{m}{n}\text{ 时，} m\text{ 和 } n\text{ 为互质的正整数，且 } n\geqslant 1,\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

由于 $x\in(0,2)$，因此有

$$0<\frac{m}{n}<2,$$

即　　$0<m$ 和 $m<2n$。

当$n=1$时，m只能取 1，故$x=1$时，$y=1$；

当$n=2$时，m只能取1, 3，故$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}$；

当$n=3$时，m只能取1, 2, 4, 5, 故 $x=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$时，$y=\frac{1}{3}$；

当$n=4$时，m只能取1, 3, 5, 7, 故 $x=\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}$时，$y=\frac{1}{4}$；

当$n=5$时，m只能取 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9，故 $x=\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{6}{5}$，$\frac{7}{5}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{9}{5}$时，$y=\frac{1}{5}$；

当$n=6$时，m只能取1, 5, 7, 11, 故$x=\frac{1}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{6}$，$\frac{11}{6}$时，$y=\frac{1}{6}$；

当$n=7$时，m只能取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13，故

---

① 黎曼：Riemann, G.F.B，德国数学家，1826—1866年。

$x=\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{13}{7}$时，

$y=\frac{1}{7}$等等。

在一切无理点函数值为零。

综上所述，函数的示意图如图1.10示。

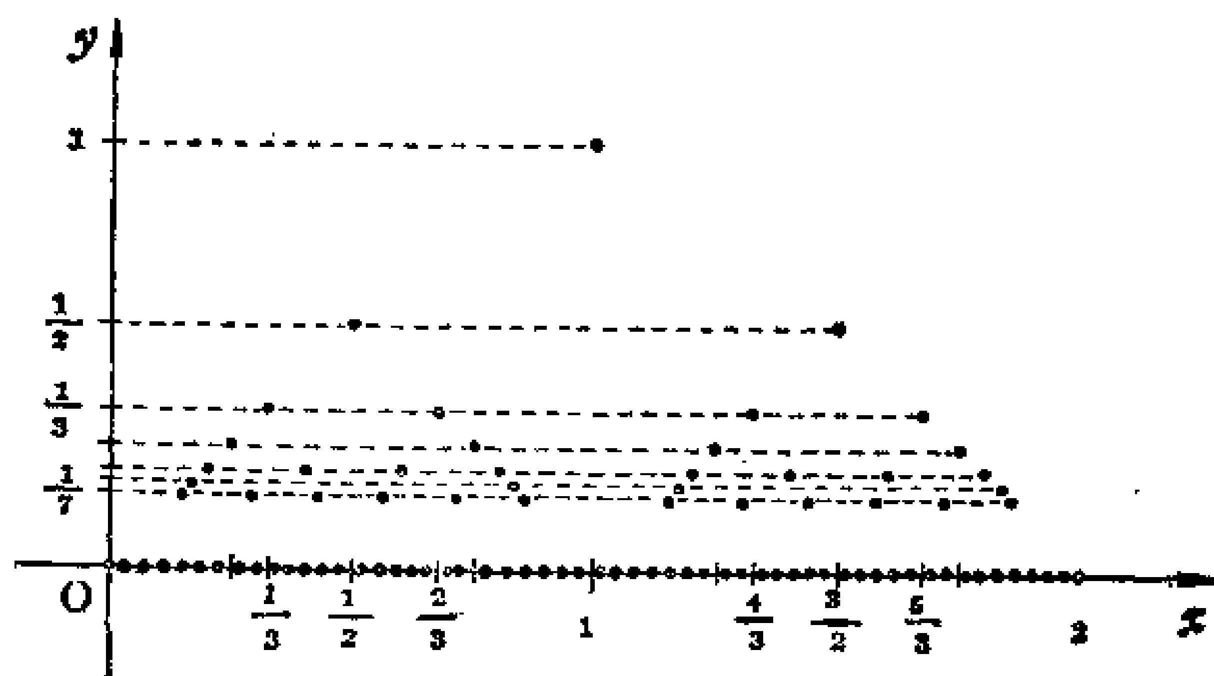


图1.10

二 数 列

定义 凡以自然数为定义域，且按自然数大小顺序排列起来的函数值全体，称为**数列**。若自然数n的函数值为a_n，那么数列就是

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

其中每一个自然数所对应的函数值叫做数列的项，而第n项a_n叫做数列的通项。为了书写简便，简记为$\{a_n\}$。

在数列中，如果数列$\{a_n\}$的每一项都相等，则称为**常数数列**。例如$\{2\}$，$\{-\frac{1}{2}\}$都是常数数列。

例 7 我国古代哲学家庄周（公元前369—286），在他的《庄子天下篇》中引到惠施的话："一尺之棰，日取其半，万

世不竭”。这段话的意思是有一尺长的木棒，每天截去一半，永远也截不完。而每天剩余的木棒长度是数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$

显然，它是一个等比数列。

例 8　已知某数列的通项是 $1-\frac{1}{n}$，试写出数列，并画出数列的图象。

解　因为通项是 $1-\frac{1}{n}$，所以依次取其 n 为自然数就得到数列

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\ \cdots.$$

其函数图象就是对应自然数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$，在平面上的一列孤立点

$$(1,0),\ \left(2,\frac{1}{2}\right),\ \left(3,\frac{2}{3}\right),\cdots,\left(n,\frac{n-1}{n}\right),\ \cdots.$$

其函数图象如图1.11示。

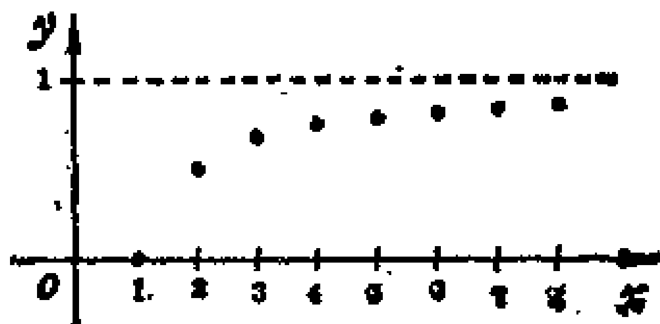


图1.11

例 9　写出数列

$$\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$$

的自变量与其对应的函数值，并画出函数图象。

解　自变量 n 与 $\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ 的对应是：

n	1	2	3	4	5	6	7	……
$\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{7}$	……

其函数图象如图1.12示。

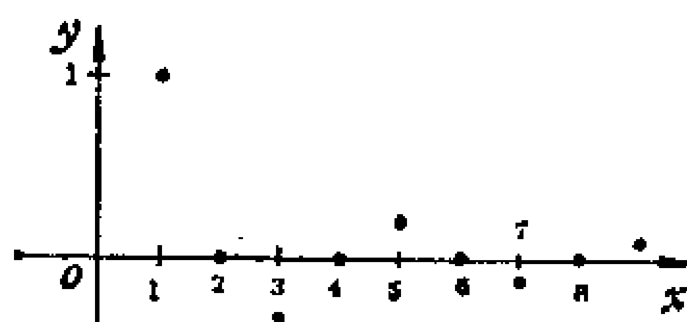


图1.12

例10 写出数列

$$\{n!\}$$

的自变量与其对应的函数值，并画出函数的图象。

解 自变量n与$\{n!\}$的对应是：

n	1	2	3	4	5	6	7	……
$\{n!\}$	1	2	6	24	120	720	5040	……

其函数图象如图1.13示。

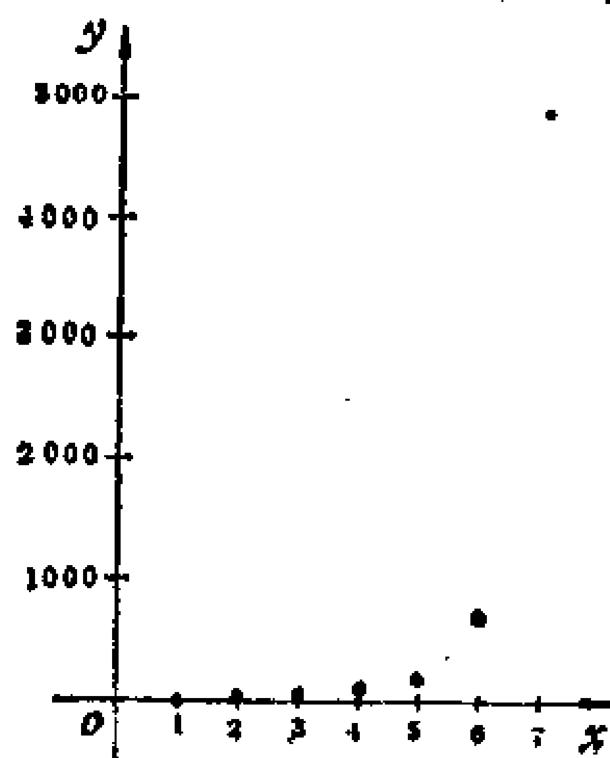


图1.13

§ 1.5 某些函数的重要性质

本节我们将要讨论函数的奇偶性、周期性、单调性和有界性。

一 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于坐标原点是对称的。如果对其定义域上的任意 x，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

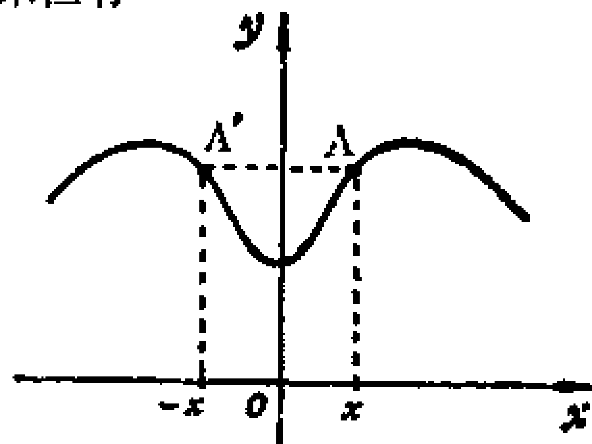


图1.14

因为 $f(-x)=f(x)$，所以偶函数的图象是关于 y 轴对称的(如图1.14)。这就是说，如果点 $A(x, f(x))$ 在图象上，则关于 y 轴的对称点 $A'(-x, f(x))$ 也在图象上。

因为 $f(-x)=-f(x)$，所以奇函数的图象是关于坐标原点对称的（如图1.15）。这就是说，如果点 $A(x, f(x))$ 在图象上，则关于原点的对称点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图象上。

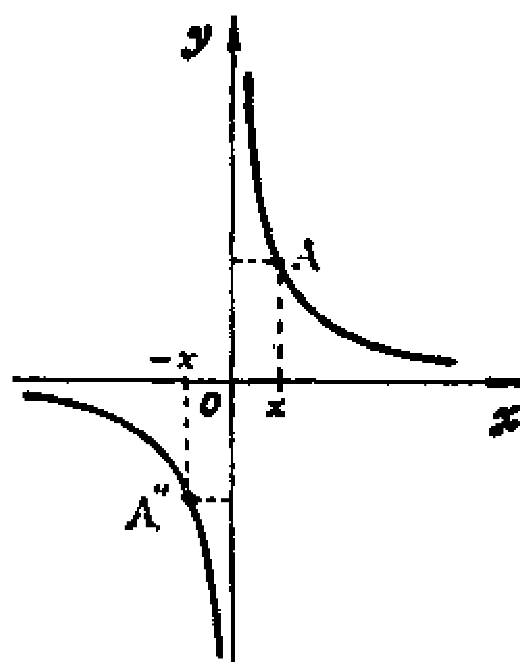


图1.15

例如，函数 $y=\cos x$, $y=x^2$, $y=x^{2n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是偶函数. 函数 $y=\sin x$, $y=$

x^3, $y=x^{2n-1}(n=1,2,\cdots)$都是奇函数。而函数$y=\sin x+\cos x$, $y=e^x$, $y=\log_a x$都是非奇非偶的。

二　函数的周期性

定义　对于函数$y=f(x)$,如果存在常数$l>0$,对其定义域X上的任意x,使$x\pm l\in X$,有

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称$y=f(x)$为**周期函数**。而数l称为函数的周期。

从周期函数的定义可以看出,如果l是$f(x)$的周期,则$2l$也是它的周期。事实上,

$$f(x+2l)=f[(x+l)+l]=f(x+l)=f(x).$$

一般地,如果l是$f(x)$的周期,则对于任意的整数k, kl也是$f(x)$的周期,即

$$f(x+kl)=f(x).$$

通常所说的函数周期是指最小正周期(如果最小周期存在的话)。

例如,$y=\sin x$, $y=\cos x$是以2π为周期的周期函数。$y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$是以π为周期的周期函数。

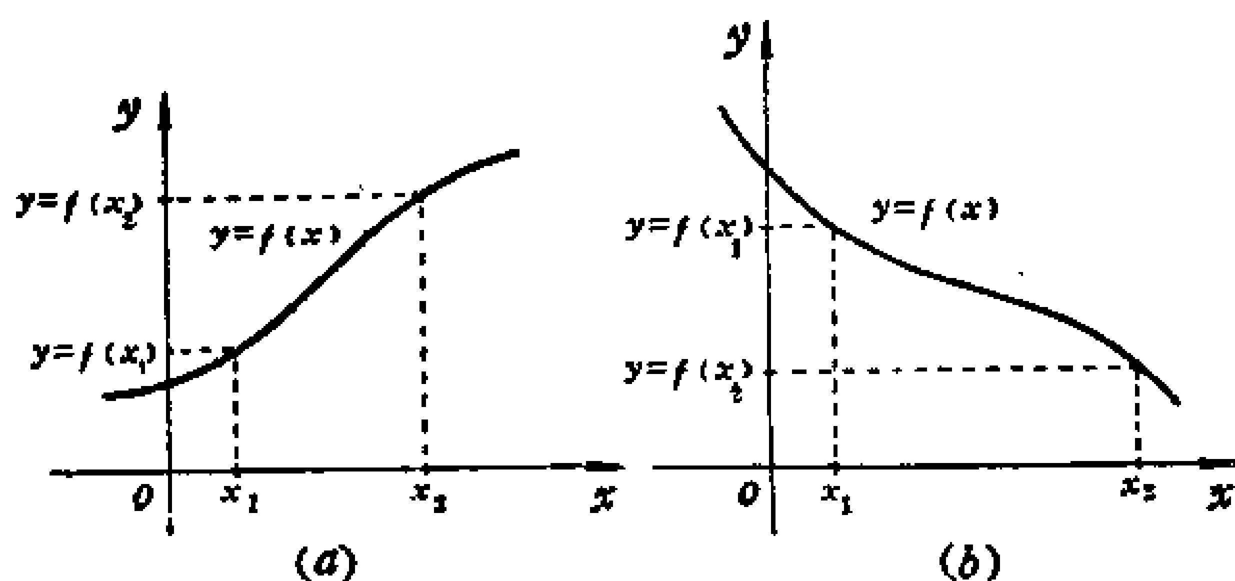
三　函数的单调性

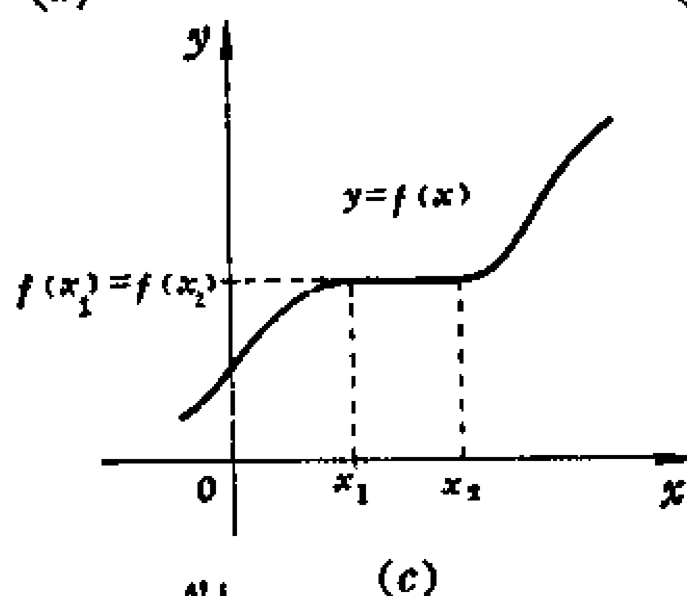
函数$y=x^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。不难看到,在$[0,+\infty)$内函数随着自变量的增大而增大,而在$(-\infty,0)$内函数随着自变量的增大而减小,函数的这种性质在数学分析中有着重要应用。

定义　设函数$y=f(x)$在某区间X上有定义。对于X内的任意两点x_1, x_2,且有$x_1<x_2$。

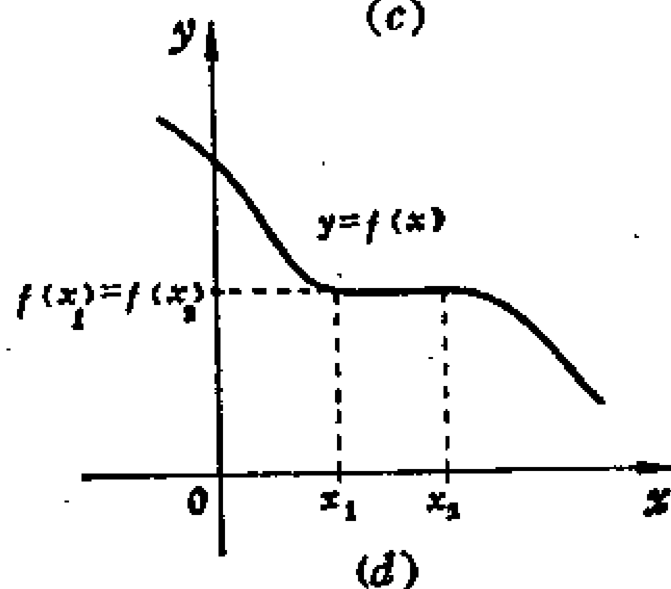
如果恒有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在X上为**严格递增函数**(如图1.16(a))

如果恒有$f(x_1)>f(x_2)$,则称$f(x)$在X上为**严格递减函数**(如图1.16(b))





(c)



(d)

图 1.16

如果恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在X上为递增（或不减）函数（如图1.16(c)）

如果恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在X上为递减（或

不增）函数（如图1.16(d)）。

以上四种函数统称为单调函数。前两种叫做**严格单调函数**。并把区间X叫做函数$f(x)$的**单调区间**。

例如，证明函数$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是严格递增函数。

事实上，在$(-\infty,+\infty)$内任取两点$x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2).$$

因为$x_1<x_2$，所以$x_2-x_1>0$，而

$$x_2^2+x_2x_1+x_1^2=\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0.$$

于是，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，故函数$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是严格递增的。

然而，函数$y=\sin x$，$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的。

类似地，也有数列的单调性。

例如，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，由于有$\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2^{n+1}}$，因此它是严格递减的。

数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$，由于有$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$，因此它是严格递增的。

数列$\{\lg n\}$，由于有$\lg n<\lg(n+1)$，因此它是严格递增的。

而数列$\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$不是单调数列。因为当$n$是偶数时，有$(-1)^n\frac{1}{n}>(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$，而当$n$为奇数时，又有$(-1)^n\frac{1}{n}<(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$.

四　函数的有界性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在常数 M，对任意 $x\in X$，都有

$$f(x)\leqslant M\ (\text{或}\ f(x)\geqslant M),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有**上界**（或有**下界**）．如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，称 $f(x)$ 在 X **上有界**．反之称 $f(x)$ 在 X **上无界**．

不难证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是：存在正数 K，对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant K$．

事实上，由于 $f(x)$ 在 X 上有界，故存在数 m 和 M，使之 $m\leqslant f(x)\leqslant M$．令 K 是 $|m|$ 与 $|M|$ 中最大者，显然对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant K$．反之，由于 $|f(x)|\leqslant K$，根据不等式的性质1，有 $-K\leqslant f(x)\leqslant K$．再根据有界的定义，故知函数 $f(x)$ 在 X 上有界．

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界．因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$；$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界（对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $a^x>0$），而无上界；$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既无上界又无下界．根据定义，后两种情况都是无界．然而，函数的有界性与它所在的区间有直接关系．例如，$y=a^x$，当 $a>1$ 时，并限制在区间 $(-\infty,0]$ 上，显然，函数 $y=a^x$ 在该区间上是有界的，因为对于任意的 $x\in(-\infty,0]$，$0<a^x\leqslant 1$．

类似地，有数列的有界性．

例如，对数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$ 和 $\{n\}$ 分别有

$$0<\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

$$0\leqslant 1-\frac{1}{n}<1\qquad(n=1,2,\cdots),$$

$$-1 \leqslant \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \leqslant 1 \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$3 < \pi < 4 \qquad\qquad (n=1,2,\cdots),$$

因此它们都是有界的.

而数列$\{(-1)^n n\}$，$\{e^n\}$和$\{n!\}$都是无界的.

§ 1.6 反函数与复合函数

一 反函数

在函数定义中，有两个变量，在变量变化中自变量处于主动的地位，而因变量处于从属的地位．然而，在一定的条件下两者可以互相转化.

例如，在初速度为零的自由落体运动中，下落的路程S与时间t的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad (t \geqslant 0).$$

一般认为t是自变量，S是因变量，当下落时间t给定之后可求得路程S．但是，有时给定下落路程要求下落时间．那么怎样求下落时间呢？显然,应从上式中将t解出来，即

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

在这个解析式中S成了自变量，而t成了因变量.

此例表明，同一问题在不同的条件下，自变量与因变量可以互相转化.

定义 设函数$y=f(x)$的定义域为X，值域为Y，如果对于Y中的每一个值y，在X中都有唯一的值x与之对应（对应规律仍是$y=f(x)$),则得到一个以y为自变量，以x为因变量的新函数，称为$y=f(x)$的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y).$$

从反函数的定义中可以看出：

（1）如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数，则其定义域 X 和值域 Y 之间必存在一种特殊的对应规律。在函数定义中，要求 X 中的每一个值 x 对应 Y 中的一个确定值 y。在反函数定义中，又要求 Y 中的每一个值 y 对应 X 中的一个确定值 x。即对任意的 x_1，$x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，通常把这种对应叫做一一对应。

（2）实际上，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是互为反函数，即

$$f^{-1}(f(x))=x,x\in X;f(f^{-1}(y))=y,y\in Y.$$

通常都用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示函数。为了与习惯一致，将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 改为 x，把 x 改为 y。这样就将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示为 $y=f^{-1}(x)$。

例1 证明函数 $y=3x+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上存在反函数；求其反函数，并画出函数与反函数的图形。

证明 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取 x_1，x_2，$x_1\neq x_2$，也就是 $x_1-x_2\neq 0$，且有

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+1-(3x_2+1)=3(x_1-x_2)\neq 0,$$

即函数的定义域与值域之间是一一对应的，故存在反函数。

其反函数为

$$y=\frac{1}{3}(x-1).$$

因为函数 $y=3x+1$ 及其反函数 $y=\frac{1}{3}(x-1)$ 都是直线，所以利用截距法很容易作出它们的图象（如图1.17）。

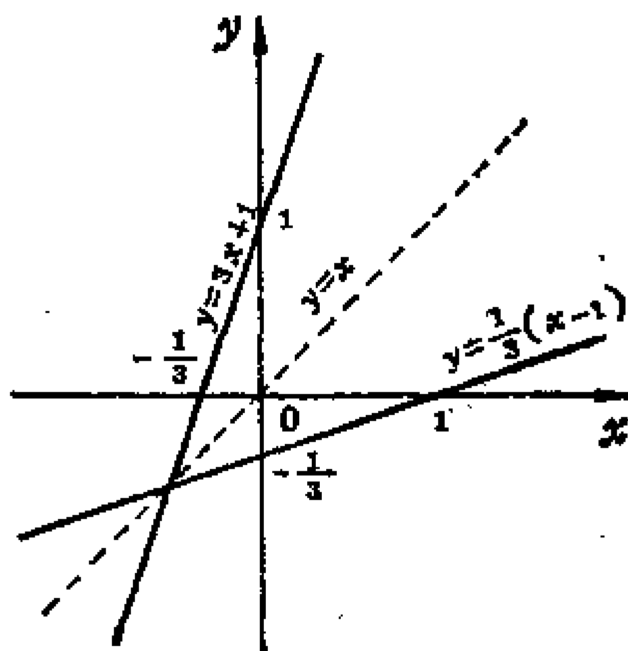


图1.17

下面我们来研究函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象之间的关系。

从图1.17不难发现，函数 $y=3x+1$ 的图象及其反函数 $y=\frac{1}{3}(x-1)$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的，对于一般函数是不是这样呢？

函数 $y=f(x)$ 及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

事实上，在函数 $y=f(x)$ 的图象上任取一点 (x_0, y_0)，当然有 $y_0=f(x_0)$。由反函数的定义知，$x_0=f^{-1}(y_0)$，这表明点 (y_0, x_0) 在函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上。而点 (x_0, y_0) 与点 (y_0, x_0) 到直线 $y=x$ 上任一点 (x,y) 的距离分别是

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\sqrt{(x-y_0)^2+(y-x_0)^2},$$

由于 $y=x$，因此有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(x-y_0)^2+(y-x_0)^2},$$

故点 (x_0, y_0) 与点 (y_0, x_0) 关于直线 $y=x$ 是对称的。再根据点 (x_0, y_0) 的任意性，从而知函数 $y=f(x)$ 及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

一个函数在什么条件下，存在反函数呢？下面的定理给出了一个函数存在反函数的充分条件：

定理1.1 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上是严格递增（或严格递减）的，则它存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且也是严格递增（或严格递减）的。

证明 我们仅就严格递增的情况证明。

设 $y=f(x)$ 的值域为 Y。关于反函数存在性，只须证明，对 Y 中任意一个 y_0，在区间 X 中必存在唯一的一个 x_0 与之对应，且

$$f(x_0)=y_0.$$

x_0 的存在性是显然的，现证明唯一性。

用反证法，假设在 X 中存在 $x_0'\neq x_0$，也满足

$$f(x_0') = y_0,$$

则有 $\quad f(x_0) = f(x_0') = y_0,$

这就与 $y=f(x)$是严格递增的相矛盾. 因此, 函数 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$.

再证反函数 $x=f^{-1}(y)$在Y上也是严格递增的, 即Y中任意两点 y_1与 y_2, 当 $y_1<y_2$时, 必有 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

用反证法, 假设 $f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)$. 令 $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$, 即

$$x_1=f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)=x_2.$$

因为 $y=f(x)$在X上是严格递增的, 所以当 $x_1\geqslant x_2$时, 有

$$y_1=f(x_1)\geqslant f(x_2)=y_2.$$

显然这与假设的 $y_1<y_2$相矛盾, 故证明了反函数 $x=f^{-1}(y)$在Y上是严格递增的. □

类似地可以证明严格递减的情形, 留给读者作为练习.

例 2 证明函数 $y=x^{2n-1}$ $(n\in N)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上存在反函数.

证明 根据定理1.1, 只须证明函数 $y=x^{2n-1}(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增的即可. 事实上, 任取两点 x_1, $x_2\in(-\infty,+\infty)$.

显然, 当$0\leqslant x_1<x_2$时, 有 $x_2^{2n-1}>x_1^{2n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

当 $x_1<x_2\leqslant 0$时, 两边乘以-1, 有$-x_1>-x_2\geqslant 0$. 于是,

$$(-x_1)^{2n-1}>(-x_2)^{2n-1},$$

即 $\quad -x_1^{2n-1}>-x_2^{2n-1},$

故得 $\quad x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}(n=1,2,\cdots).$

同理可证, 当$x_1<0<x_2$时, 也有 $x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}$.

综上所述, 函数 $y=x^{2n-1}$在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增的, 故存在反函数 $y=\sqrt[2n-1]{x}$.

例 3 证明函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数.

证明 事实上, 对函数的值域 $[0,+\infty)$内任意一点$y_0>$

0，在函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内对应于 y_0 有两个 x，即

$$x=\pm\sqrt{y_0}.$$

它不满足一一对应的条件，故函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上不存在反函数。

如果将函数 $y=x^2$ 仅限制在区间 $(-\infty,0]$ 或 $[0,+\infty)$ 上，则函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 或 $[0,+\infty)$ 上存在反函数，反函数分别是 $y=-\sqrt{x}$ 与 $y=\sqrt{x}$。这是因为函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上严格递减，在区间 $[0,+\infty)$ 上严格递增。

二　复合函数

由两个或多个简单函数能构成新的复杂的函数，除经过简单函数的四则运算外，大量的是用复合的方法构成的。例如，质量为 m 的运动物体的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2,$$

而速度 v 又是时间 t 的函数。如果所研究的是初速度为零的自由落体，则其下落速度为 $v=gt$。这时物体的动能 E 通过中间变量 v 是时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

函数 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$ 就是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 用复合的方法构成的。

定义　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，其值域为 U'，且

$$U\cap U'\neq\phi$$

则称函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 所构成的**复合函数**，u 称为**中间变量**。

复合函数的定义域由 $u=\varphi(x)$ 的定义中使 $\varphi(x)$ 属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 的全体组成。

这里把一个函数“代入”另一个函数的运算叫做复合运算.

例 4 函数 $y=\sin^3 x$，可以看成 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 复合而成；

函数 $y=\sqrt[3]{1+\cos^2 x}$，可以看成 $y=u^{\frac{1}{3}}$，$u=1+v^2$ 和 $v=\cos x$ 复合而成；

函数 $y=\sqrt{1+\lg(3+\cos a^x)}$，可以看成

$$y=u^{\frac{1}{2}}$$
$$u=1+\lg v$$
$$v=3+\cos w$$
$$w=a^x$$

复合而成。

例 5 下列函数也是复合函数。

函数 $y=a^{-x}$，可以看成 $y=a^u$，$u=-x$ 复合而成；

函数 $y=(-x)^3$ 可以看成 $y=u^3$ 和 $u=-x$ 复合而成；

函数 $y=\sin(x^2)$ 可以看成 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成；

函数 $y=\cos\frac{1}{x}$ 可以看成 $y=\cos u$ 和 $u=\frac{1}{x}$ 复合而成。

例 6 求复合函数 $y=\log_a\sin x$ 与 $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ 的定义域。

解 复合函数 $y=\log_a\sin x$ 是函数 $y=\log_a u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成，其定义域是所有使 $\sin x>0$ 的 x 的集合，即

$$2n\pi<x<(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

复合函数 $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ 是函数 $y=\arccos u$ 与 $u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成，其定义域是所有使 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$ 的 x 的集合。由于对任意的 x，都有 $|2x|\leqslant1+x^2$，即

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1,$$

故函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

§ 1.7 初等函数

一 基本初等函数

在中学数学中，学过如下函数：

幂函数 $y=x^\alpha$ (α为实数)；

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)；

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)；

三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$,

$y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$;

反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$,

$y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

为了区别其它更复杂的函数，把这五种函数叫做**基本初等函数**.

由于基本初等函数是构成（如复合等）复杂函数的基础，因此在函数的研究中它起着重要作用. 下面集中复习这些函数的基本性质和它们的图象.

1 幂函数

$$y=x^\alpha \ (\alpha\text{为实数}).$$

幂函数的定义域与α有直接关系. 当 $\alpha=\frac{1}{2}$时，函数的定义域为 $[0, +\infty)$；当$\alpha=\frac{1}{3}$时，函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$. 但是，不论α为何值，函数在区间$(0, +\infty)$ 上总是有定义的.

（1）当$\alpha>0$时.

此时函数的图象叫做α次抛物线，且过点$(0,0)$及点$(1,1)$

（如图1.18）。

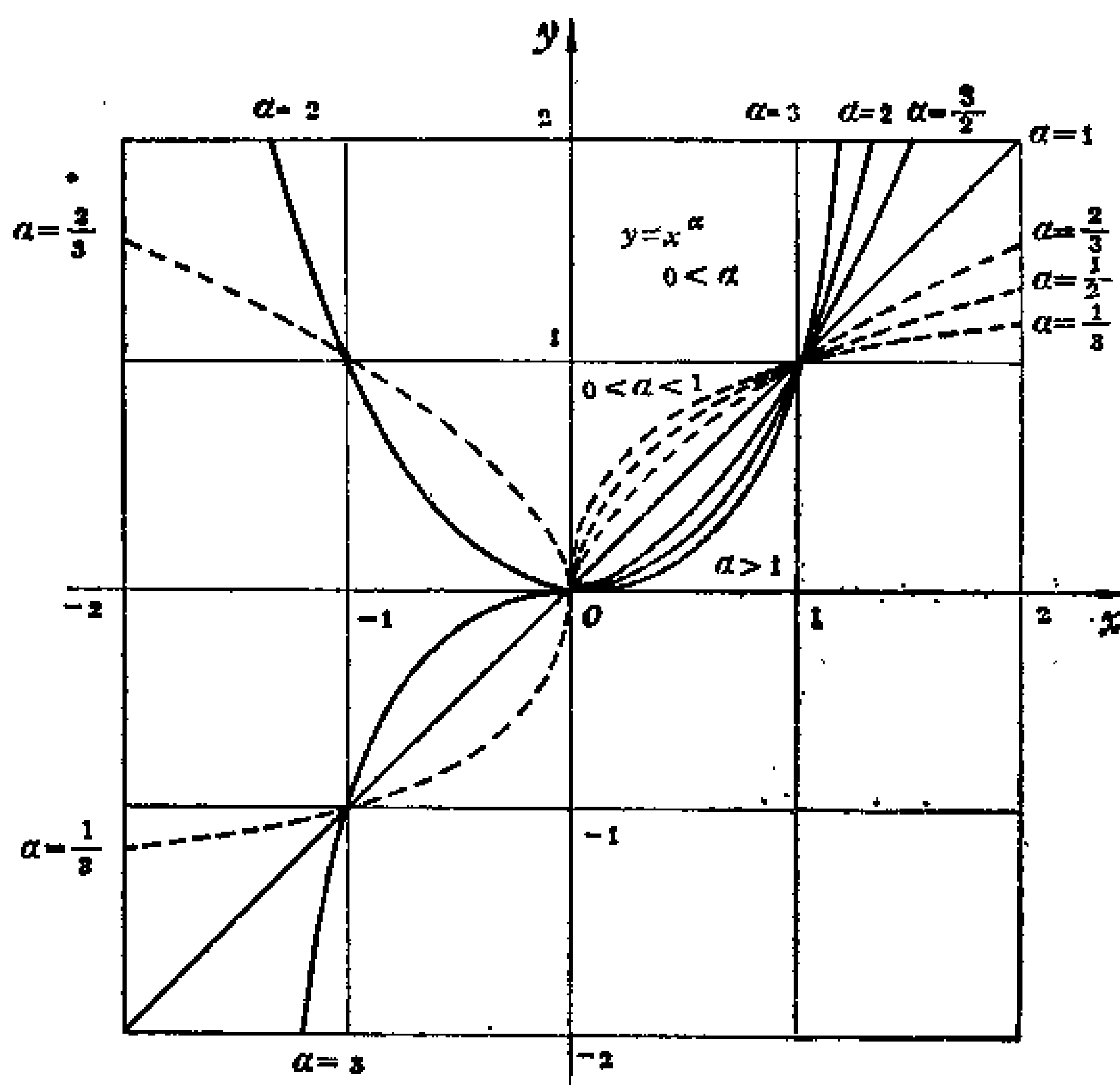


图1.18

特别地，当 $\alpha=2n$ （$n=1,2,\cdots$）时，$y=x^{2n}$。

函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）；

函数的值域为〔0，$+\infty$）；

函数都是偶函数；

函数在〔0，$+\infty$）上是严格递增的，而在（$-\infty$，0〕上是严格递减的。如图1.18，$\alpha=2$情形。

当$\alpha=2n-1$（$n=1,2,3,\cdots$），$y=x^{2n-1}$。

函数的定义域和值域都是（$-\infty$，$+\infty$）；

函数都是奇函数；

函数在（$-\infty$，$+\infty$）上是严格递增的。如图1.13，$\alpha=3$的

情形.

当α是正的既约分数时，即 $\alpha=\frac{m}{n}$，n，m 为互质的正整数．如果n为奇数．则其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，如图 1.18，$\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha=\frac{2}{3}$的情形．如果 n 为偶数，m为奇数，则其定义域为 $[0, +\infty)$，如图1.18，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha=\frac{3}{2}$ 的情形．这两种情况函数的单调性和奇偶性也不难判断，留给读者作为练习．

（2）当$\alpha<0$时．

此时函数的图象叫做 m $(m=-\alpha)$ 次双曲线，而且过点 $(1,1)$（如图1.19）．

特别地，当 $\alpha=-2n(n=1,2,\cdots\cdots)$ 时，$y=x^{-2n}$．

函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

函数的值域为$(0,+\infty)$；

函数都是偶函数；

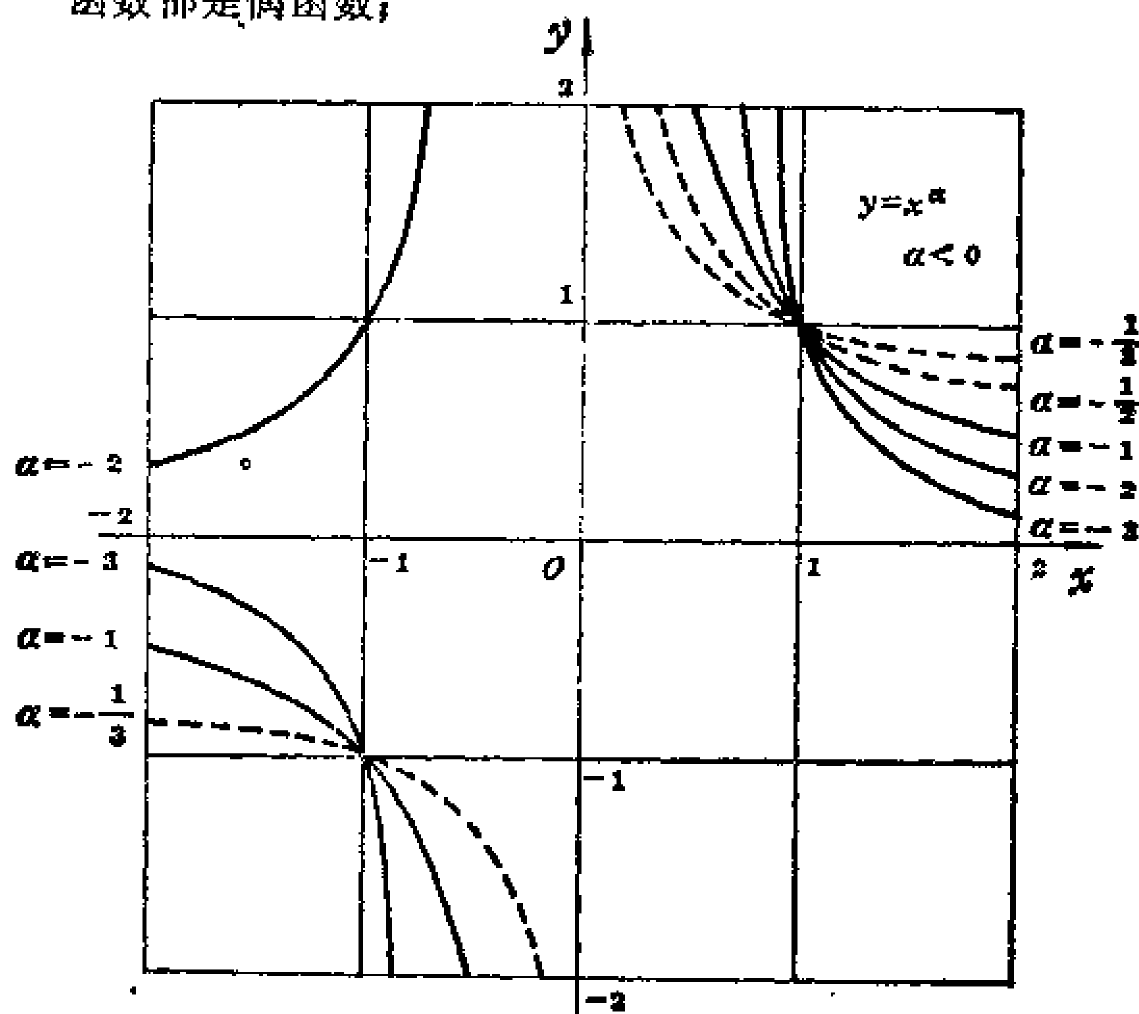


图1.19

函数在区间$(-\infty,0)$上是严格递增的，而在区间$(0,+\infty)$上是严格递减的。如图 1.19，$\alpha=-2$的情形。

当 $\alpha=-(2n-1)$时， $y=x^{-(2n-1)}$。

函数的定义域和值域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

函数都是奇函数；

函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是严格递减的。如图1.19，$\alpha=-3$的情形。

当 $\alpha=-\frac{1}{3}$时，函数是奇函数。当 $\alpha=-\frac{1}{2}$时，函数的定义域是 $(0,+\infty)$。

2 指数函数

$$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$；函数的图象都过点$(0,1)$（如图1.20）.

当$a>1$时，函数是严格递增的。

当 $0<a<1$时，函数是严格递减的。

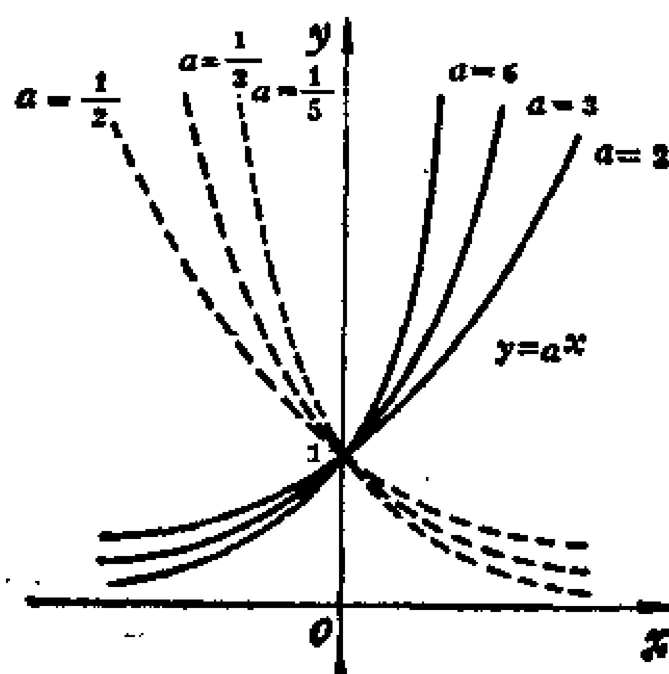


图1.20

3 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

由于指数函数 $y=a^x$ 在其定义域上是严格单调的，因此它存在反函数，即对数函数。

对数函数的定义域就是指数函数的值域$(0, +\infty)$，而对数函数的值域就是指数函数的定义域$(-\infty, +\infty)$（如图1.21）。

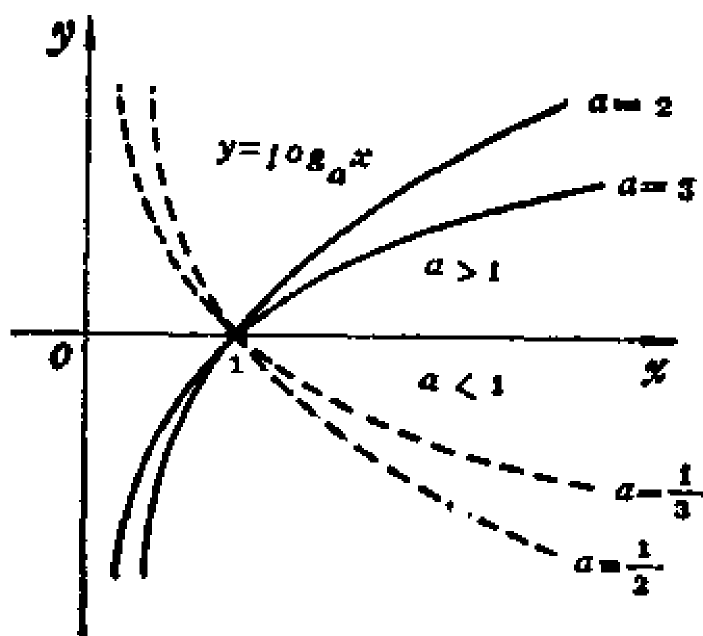


图1.21

当$a>1$时，对数函数是严格递增的；当 $0<x<1$时，其函数值为负．当$x>1$时，其函数值为正。

当$0<a<1$时，对数函数是严格递减的；当$0<x<1$时，其函数值为正，当$x>1$时，其函数值为负。

特别地，以10为底的对数叫做**常用对数**，用“lg”表示．以无理数e为底的对数叫做**自然对数**，用“ln”表示。

4 三角函数

正弦函数与余弦函数

$$y=\sin x \text{ 与 } y=\cos x.$$

它们的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，值域都是$[-1, 1]$。

它们都是以2π为周期的周期函数。

因为有

$$\sin(-x)=-\sin x \text{ 与 } \cos(-x)=\cos x,$$

所以正弦函数是奇函数，函数图象关于原点对称（如图1.22）。

余弦函数是偶函数，函数图象关于y轴对称（如图1.22）。

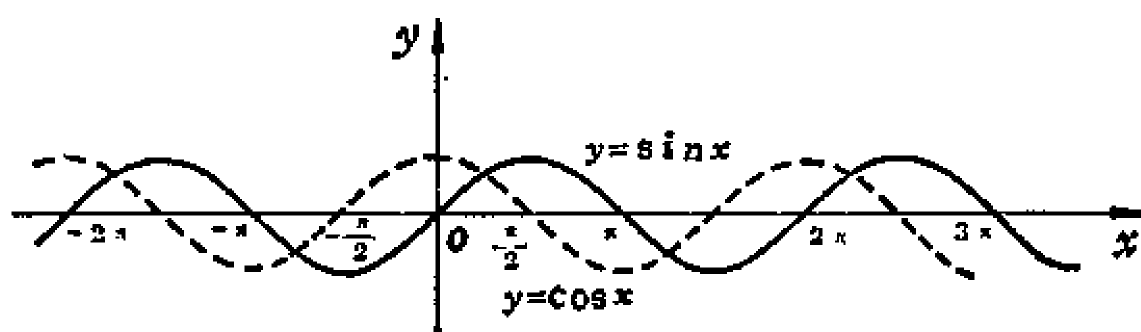


图1.22

因为有

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,$$

所以两个函数在整个定义域上是有界的。

从图1.22看到，函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增的，而函数$y=\cos x$在$[0,\pi]$上是严格递减的。

正切函数与余切函数

$$y=\operatorname{tg}x \text{ 与 } y=\operatorname{ctg}x.$$

正切函数的定义域是实数集去掉$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（k是整数）；余切函数的定义域是实数集去掉$x=k\pi$（k是整数）；它们的值域都是$(-\infty,+\infty)$。

它们都是以π为周期的周期函数(如图1.23)。

因为有

$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x \text{ 与 }$$

$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x,$$

所以它们都是奇函数。它们的图象都是关于原点对称（如图1.23）

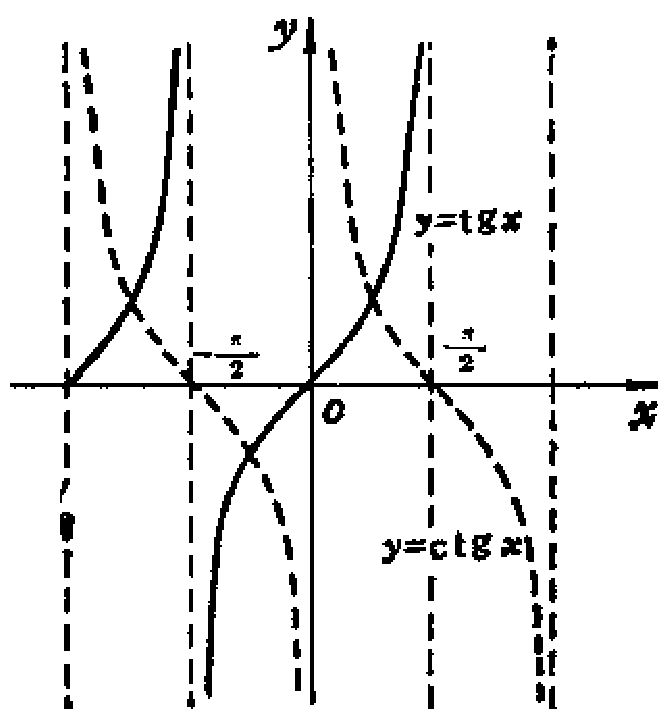


图1.23

从图1.23看到，$y=\operatorname{tg}x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上是严

格递增的；$y=\mathrm{ctg}x$在$(0,\pi)$上是严格递减的。

5 反三角函数

因为三角函数都是周期函数，所以在值域中任取一个y值，都对应定义域中无穷多个x值。如果把x仅仅限制在使三角函数严格单调的区间上，就会得到无穷多个反函数。通常总是取以原点为端点或以原点为中点的最小的且尽量取正的严格单调区间作为讨论反函数的基本区间，在这个区间所得到的反函数叫做它的主值部分。

反三角函数的定义域就是它对应的三角函数的值域，反三角函数的值域就是限制x的那个严格单调区间。

反三角函数的图象就是三角函数的图象关于直线$y=x$的对称图象。

反正弦函数$y=\arcsin x$（主值部分）的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它在定义域上是严格递增的，而且是奇函数。

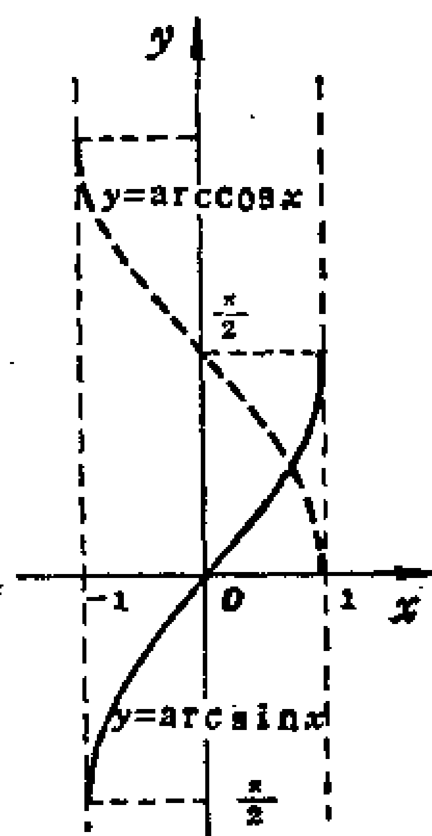


图1.24

反余弦函数$y=\arccos x$（主值部分）的定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$，它在定义域上是严格递减的。

它们的函数图象如图1.24示。

反正切函数$y=\mathrm{arctg}x$（主值部分）的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它在定义域上是严格递增的，而且是奇函数。

反余切函数$y=\mathrm{arcctg}x$（主值部分）的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,\pi]$，它在定义域上是严格递减的。

它们的函数图象如图1.25示。

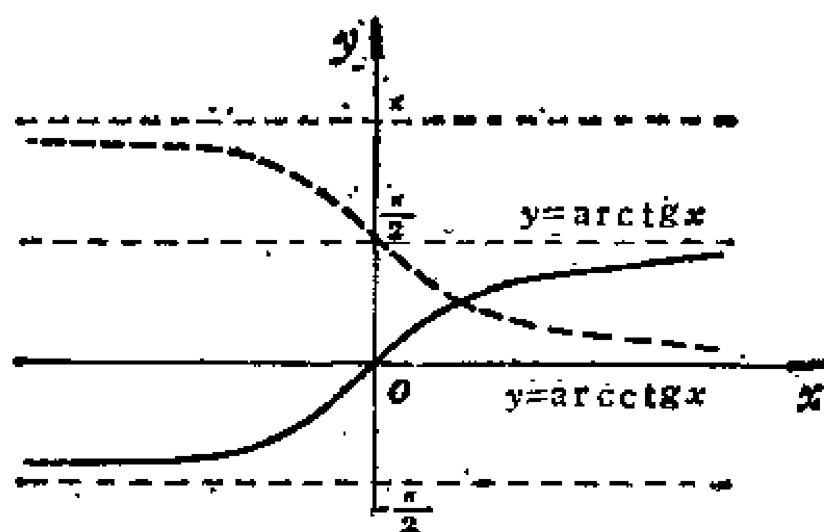


图 1.25

二　初等函数

定义　凡由基本初等函数和常数，经过有限次四则运算及有限次复合运算而构成的函数，称为初等函数．

例如，

$$y=\log_a\cos x^2,\qquad y=x^2\cdot\sin\frac{1}{x},$$

$$y=\frac{\sin x}{x}+e^{2x},\qquad y=\arcsin\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y=1+x^2+\sqrt{x^2-\sin x},\quad y=\frac{1}{x}\log_a(1+x)\text{等等},$$

都是初等函数。

三　双曲函数

现在介绍与三角函数类似的一类初等函数——双曲函数。

（1）函数$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$叫做双曲正弦函数，记作

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

$\operatorname{sh}x$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数。事实上，

$$\text{sh}(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\text{sh}x.$$

（2）函数$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$叫做双曲余弦函数，记作

$$\text{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

$\text{ch}x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是偶函数。事实上，

$$\text{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\text{ch}x.$$

根据指数函数的图象我们不难画出双曲正弦和双曲余弦的函数图象（如图1.26）。

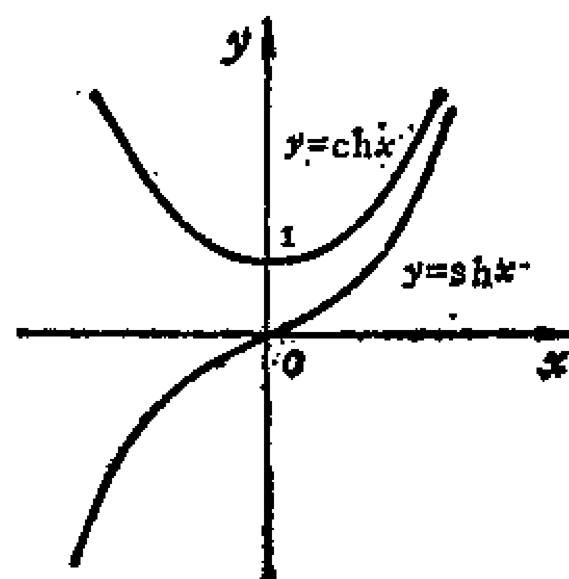


图1.26

（3）函数

$$\text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},$$

$$\text{cth}x=\frac{\text{ch}x}{\text{sh}x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}},$$

分别叫做双曲正切函数和双曲余切函数。其函数图象如图1.27示。

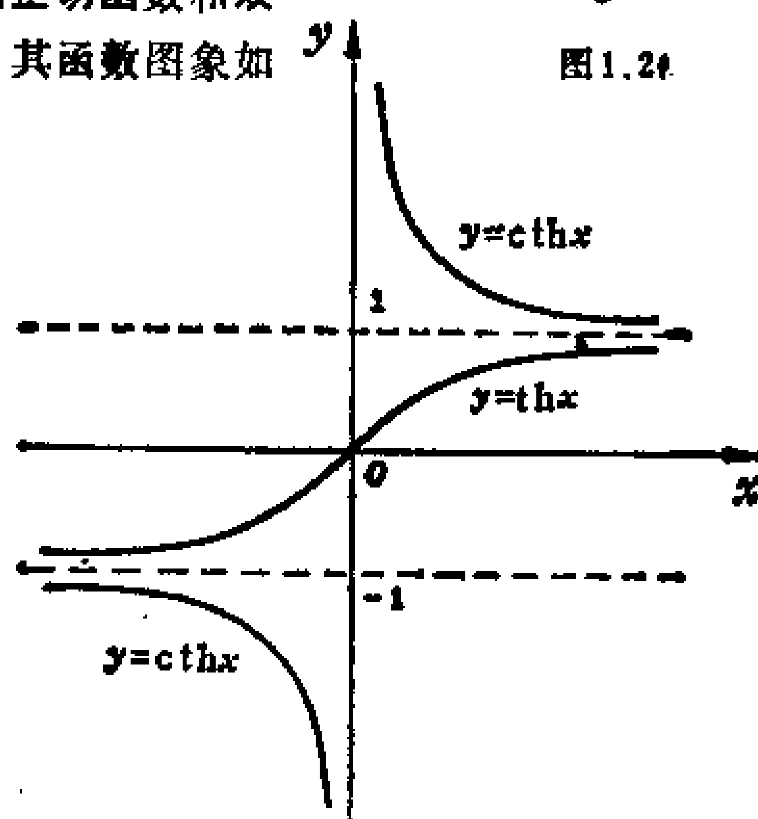


图 1.27

根据双曲函数的定义，不难证明，下列四个公式：

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

这里给出第一个公式的证明．由定义得

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{1}{4}e^{x+y}-\frac{1}{4}e^{y-x}+\frac{1}{4}e^{x-y}-\frac{1}{4}e^{-(x+y)}\\&\quad+\frac{1}{4}e^{x+y}+\frac{1}{4}e^{y-x}-\frac{1}{4}e^{x-y}-\frac{1}{4}e^{-(x+y)}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

其余三个公式留给读者作为练习。

在第四个公式里，令$x=y$，并注意到 $\operatorname{ch}0=1$，得

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

在第一个公式里，令 $x=y$，得

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$

在第三个公式里，令 $x=y$，得

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x.$$

学 习 指 导

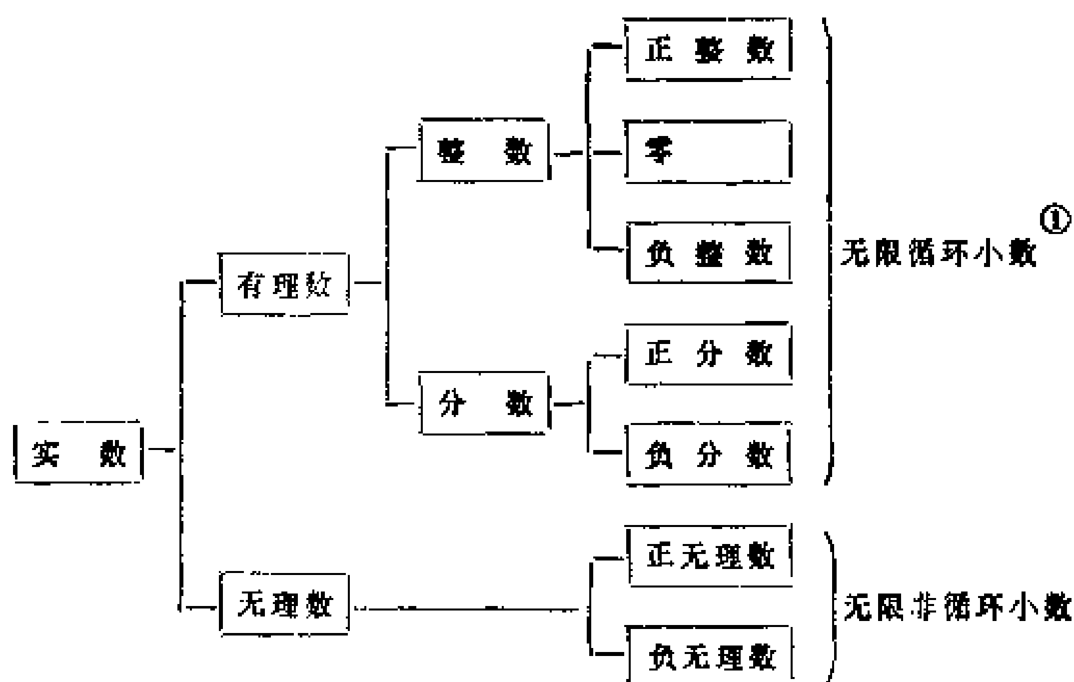
一　内容概要

1　重点及要求

本章最基本的概念是函数．在函数概念中一定要理解好函数的定义域和对应规律，其中特别是对应规律．要掌握好基本初等函数的重要性质和图象．

要善于将几个简单函数经过适当的复合运算写出它的复合函数，又要善于将一个复合函数分成几个基本初等函数．这是以后进行微积分运算所必须的．

2　实数系



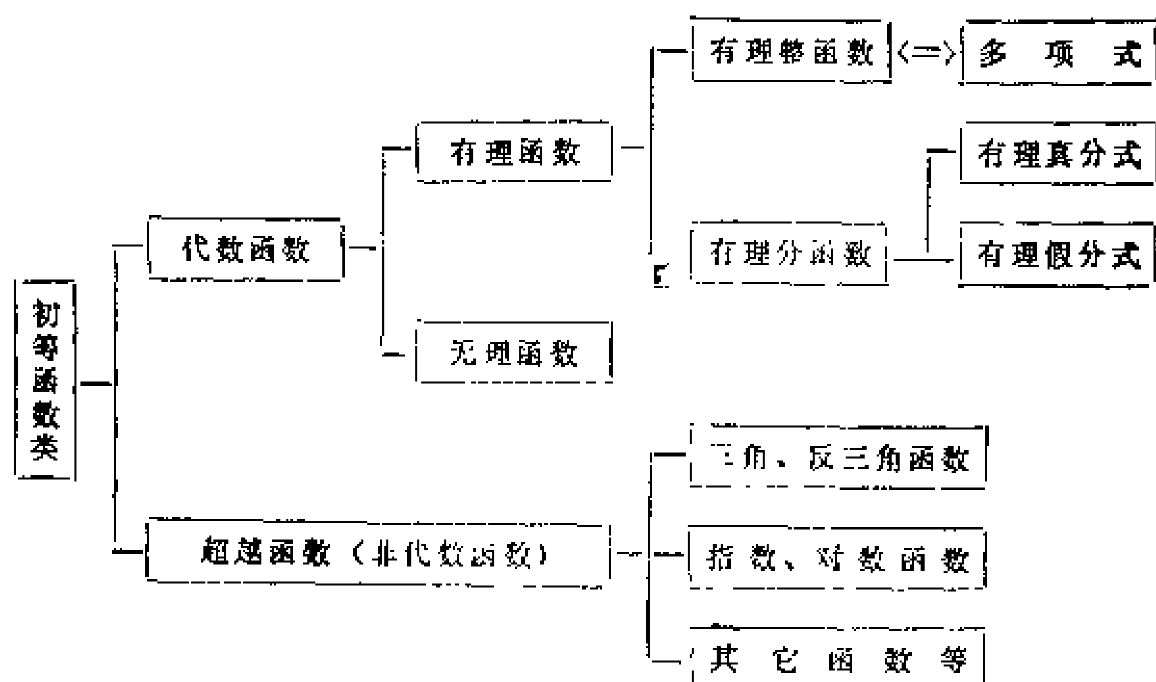
① 通常把整数，有尽小数都看成无限循环小数．例如，125＝125.000…，$\frac{10}{4}=2.5000\cdots$．

3　初等函数的分类

代数运算　把加、减、乘、除、整数次乘方和开方等运算称为**代数运算**。

代数函数　凡是对自变量及常数作有限次的代数运算，便可以求得函数值的函数，叫做**代数函数**。

现将初等函数类列表如下：



4　求函数定义域常用的方法

关于函数的定义域，在函数的定义中强调了"自变量取值的范围"，什么是自变量取值范围呢？就是在实数集中，使函数有意义的自变量的变化范围。因此，对常见的初等函数指出求其定义域的常用方法是必要的。现摘其要者归纳如下：

（1）分式的分母不能为零；

（2）开偶次方的被开方式子应为非负；

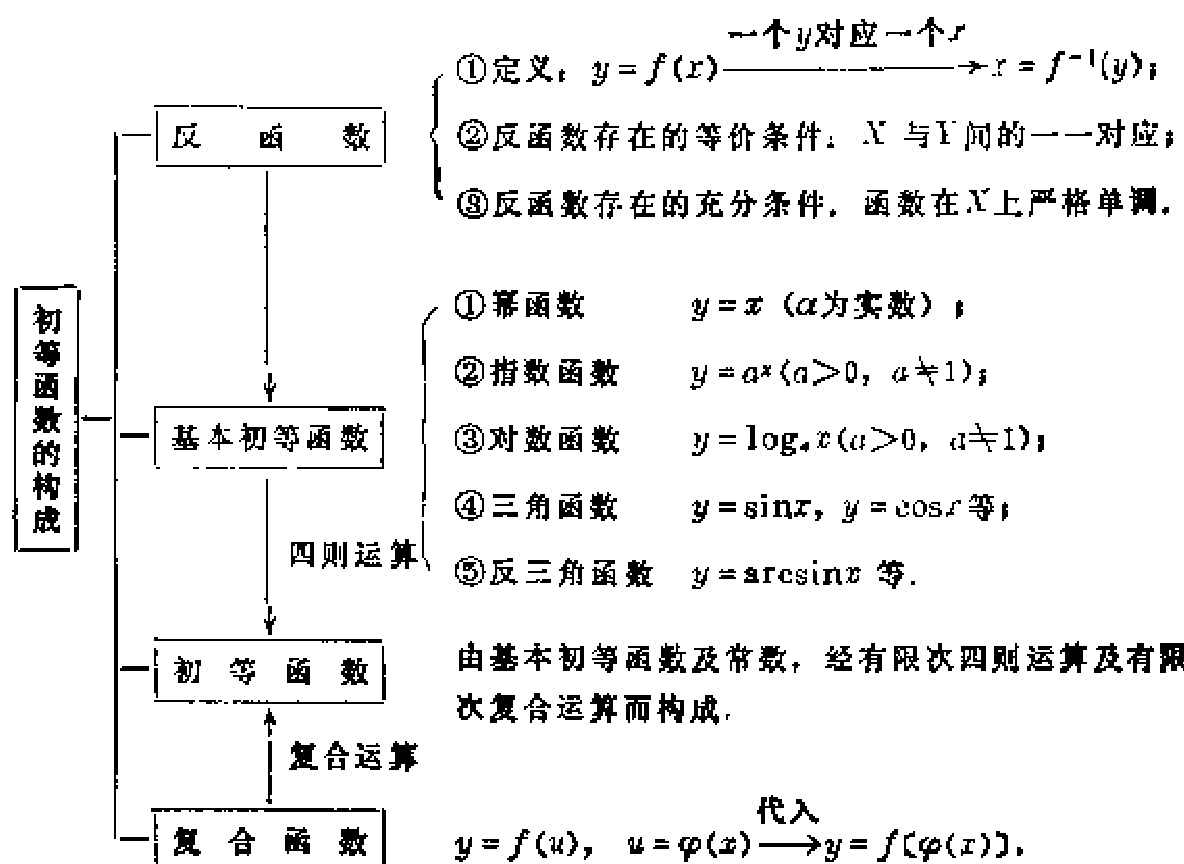
（3）当方幂的指数是无理数或含有变数时，方底的式子应为正；

（4）对数符号后的式子应为正；

（5）反正弦、反余弦符号后的式子的绝对值不超过1；

（6）有限个函数的四则运算得到的新函数，其定义域是各函数定义域的公共部分等等。

5　初等函数的构成



二　几点说明

1　两个函数相同

在函数定义中有三要素，即定义域，对应规律和值域。其中定义域和对应规律是基本的，因为值域完全可由定义域和对应规律而确定。

若两个函数的定义域和对应规律相同（即对任意的$x\in X$，按照两个函数的对应规律在Y中将得同一个y），则称两个函数相同。

例如，下面三个函数

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x},\quad \frac{|x|}{x},\quad y=\begin{cases}1 & \text{当}x>0\text{时}\\ -1 & \text{当}x<0\text{时}\end{cases}$$

它们的定义域都是实数集去掉$x=0$，而且它们的对应规律也是一样的，即当x为正数时，对应的y都等于1；当x为负数时，对应的y都等于-1。所以这三个函数是相同的，只是表达式不

同而已。

当然，若函数的定义域和对应关系这两者之中有一个不同，那么函数就不相同。

例如，$y_1 = \lg x^2$ 与 $y_2 = 2\lg x$。
由于函数 $y_1 = \lg x^2$的定义域是实数集去掉$x = 0$，函数 $y_2 = 2\lg x$的定义域是 $(0, +\infty)$，即两者的定义域不一样，故两个函数不相同。不仅这样，如果两个函数的定义域仅有一点之差，那么两个函数也不相同。例如，

$$y_1 = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad y_2 = x + 1,$$

显然，y_1 的定义域是实数集去掉 $x = 1$，而 y_2的定义域是实数集，故两个函数不相同。

除此之外，函数定义域相同，而对应关系不同，两个函数也不同，这样的例子是很多的。

2　复合函数的对应关系

在复合函数定义中，强调了函数 $y = f(u)$ 的定义域U与函数$u = \varphi(x)$ 的值域U'的交不空，即

$$U \cap U' \neq \phi.$$

它有如下几种可能：（1）U' 是U的真子集。此时，$u = \varphi(x)$的定义域X就是复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域；在这种情况下，由于U'真包含在U里，因此复合函数$y = f[\varphi(x)]$的值域较函数 $y = f(u)$ 的值域缩小了（如图 1.28）。（2）U 与 U' 是相等的，此时函数$u = \varphi(x)$的定义域X就是复合函数$y = f[\varphi(x)]$的定义域；并且复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的值域与函数 $y = f(u)$

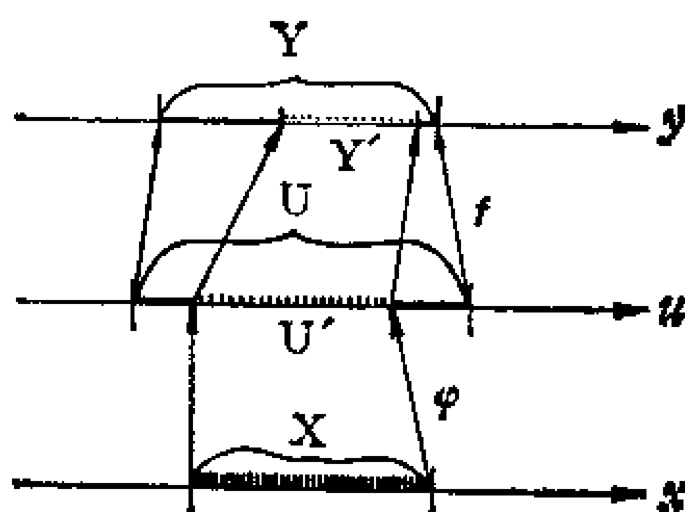


图1.28

的值域相等（如图1.21）.（3）U'的一部分包含在U里，此时函数$u=\varphi(x)$的定义域的一部分X'是复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域；由于U'的一部分包含在U里，因此复合函数$y=f[\varphi(x)]$的值域较函数$y=f(u)$的值域缩小了（如图1.30）.

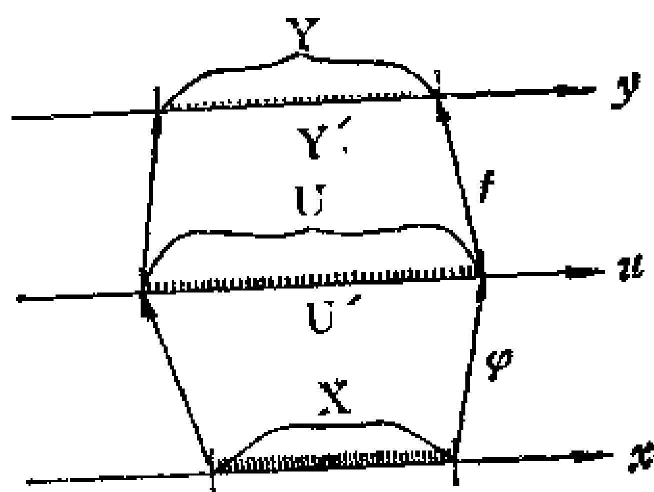


图1.29

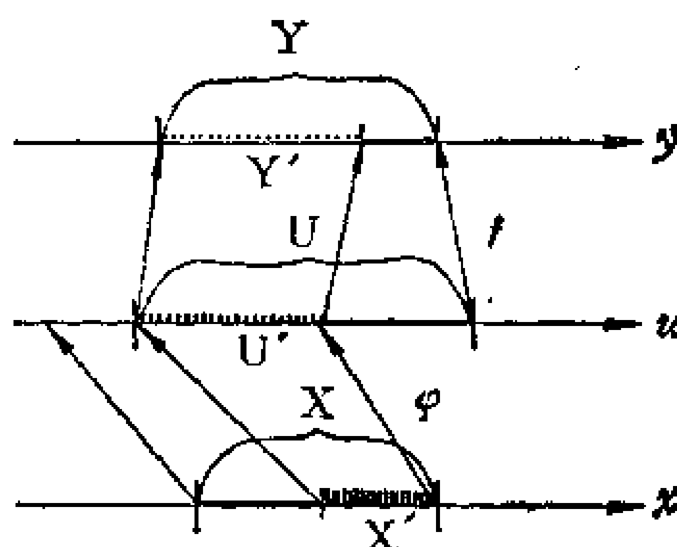


图1.30

然而，可能有$U\cap U'=\phi$. 例如，在开区间$(0,+\infty)$内定义了函数$y=f(u)=\log_2 u$，又在开区间$(-\infty,+\infty)$内定义了函数$u=\varphi(x)=-(1+x^2)$，由于函数$\varphi(x)=-(1+x^2)$的值域永远小于零，所以与函数$f(u)=\log_2 u$的定义域不交，故经过复合运算所得到的表达式

$$y=\log_2[-(1+x^2)]$$

在实数集合内无意义.

3　函数概念的推广——映射

在了解函数概念的基础上，我们来讨论映射.

设X，Y是两个集合，如果对于X内的每一个元素x，依着某个对应规律f，在Y中总有唯一确定的元素y与x对应，则称f是从X到Y的映射. 称y是x在f下的象，记作$y=f(x)$或$y=fx$. 又称x为y的原象. 集X称为映射f的定义域. 由

所有的象 $f(x)$ 所组成的集合称为 f 的象集，记作

$$R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in X\}.$$

有时为了简便，常把从 X 到 $R_f\subset Y$ 的映射写成

$$f:\ X\to Y,\quad \text{或}\ x\stackrel{f}{\longmapsto} y=f(x).$$

特别地，如果 X，Y 都是由实数组成的数集，它们之间的映射就是数学分析中所讨论的函数。

例如，函数 $y=x^3$ 是从定义域 $(-\infty,+\infty)$ 到值域 $(-\infty,+\infty)$ 上的映射。

函数 $y=\sin x$ 是从定义域 $(-\infty,+\infty)$ 到值域 $[-1,1]$ 的映射。

函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当}x>0\text{时},\\ 0, & \text{当}x=0\text{时},\\ -1, & \text{当}x<0\text{时},\end{cases}$$

是从定义域 $(-\infty,+\infty)$ 到值域 $\{1,0,-1\}$ 的映射。

由此可见映射是函数概念的推广。

三　例题选讲

例 1　在平面上画出满足 $x+y$ 是整数的一切点 (x,y) 的集合。

基本思路　在平面上首先考虑 $x+y=0$ 的点的集合，然后考虑 $x+y=n$（n 是不等于 0 的整数）。

解　因为 $x+y=0$ 就是直线 $y=-x$，在这条直线上的各点均满足 $x+y=0$，所以 $y=-x$ 是使 $x+y=0$ 的一切点集。再令 $x+y=n$，且让 $n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$，在直线 $y=-x+n$ $(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 上的各点均满足 $x+y$ 等于正、负整数的要求。（如图1.31）。于是，满足 $x+y$ 是整数的一切点集为直线族

$$y=-x+n,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

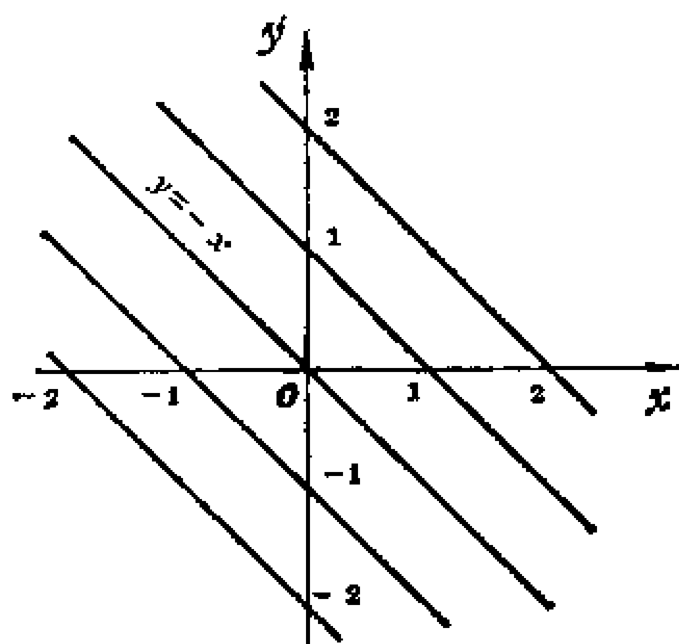


图 1.31

例 2　解不等式 $|2x+2|-|x|>1$.

基本思路　根据绝对值的定义及本题的特点，将实数轴分成三个区间，以便确定不等式中 $2x+2$ 和 x 的符号.

解　令 $|x|=0$, $|2x+2|=0$, 从中解得 $x=0, x=-1$。它们将实数轴分为三个区间

$$(-\infty,-1),\ (-1,0),\ (0,+\infty).$$

当 $x>0$ 时，原不等式为

$$2x+2-x>1.$$

解得 $x>-1$, 故其解为 $(0,+\infty)\cap(-1,+\infty)=(0,+\infty)$.

当 $-1<x<0$ 时，原不等式为

$$2x+2+x>1.$$

解得 $x>-\frac{1}{3}$, 故其解为 $(-1,0)\cap\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)=\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

当 $x<-1$ 时，原不等式为

$$-2x-2+x>1.$$

解得 $x<-3$, 故其解为 $(-\infty,-1)\cap(-\infty,-3)=(-\infty,-3)$.

又因为 $x=0$ 原不等式成立，$x=-1$ 原不等式不成立，综上所述，原不等式的解为

$(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

例 3 证明不等式

$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n| \geqslant |x| - (|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

基本思路 利用不等式的性质 4：

$|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

证明 由不等式的性质 4 得

$$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n| = |x-[-(x_1+x_2+\cdots+x_n)]|$$
$$\geqslant |x| - |-(x_1+x_2+\cdots+x_n)|$$
$$= |x| - |x_1+x_2+\cdots+x_n|.$$

再根据不等式的性质 3：$|a+b| \leqslant |a| + |b|$，有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1| + |x_2+\cdots+x_n| \leqslant \cdots$$
$$\leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

或 $-|x_1+x_2+\cdots+x_n| \geqslant -(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

代入上面不等式里，最后得

$$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n| \geqslant |x| - (|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

例 4 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}+\frac{3}{x-1}$ 的定义域。

基本思路 被开方数不能小于零，分母不能为零。

解 要求 $1-x^2 \geqslant 0$，解得 $x \in [-1,1]$；又要求 $x \geqslant 0$，即 $x \in [0,+\infty)$；以及要求 $x \neq 1$，即 $x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$。

于是，函数的定义域为

$[-1,1] \cap [0,+\infty) \cap [(-\infty,1) \cup (1,+\infty)] = [0,1)$.

例 5 求函数 $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 的定义域。

基本思路 主要考虑零乘任何数都为零。

解 因为偶次方根的被开方的式子不能为负，所以有 $-\sin^2\pi x \geqslant 0$，但是要使 $-\sin^2\pi x \geqslant 0$ 成立，只须 $\sin\pi x=0$，即 $x=k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2\cdots\cdots)$。

另外，当 $x-|x|=0$ 时，即使 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 不是实数，也使 $y=0\cdot\sqrt{-\sin^2\pi x}=0$。于是，当 $x \geqslant 0$ 时，$x-|x|=0$，认为 y

是有定义的。

综上所述，函数的定义域为$x\geqslant 0$以及$x=-k(k=1,2,\cdots)$。

例 6　证明 $y=\sin x^2$不是周期函数。

证明　应用反证法。假如T是函数$f(x)=\sin x^2$的周期。由于$f(0)=\sin 0^2=0$，故$f(T)=f(0+T)=f(0)=0$，即

$$\sin T^2=0.$$

由此可知，$T^2=k\pi$或$T=\sqrt{k\pi}\ (k=1,2,\cdots)$。

因为T是函数$f(x)$的周期，可见$2T=2\sqrt{k\pi}$也是$f(x)$的周期，而且有$f(2T)=0$，所以$f(x)$在区间$(0,\sqrt{k\pi})$和$(\sqrt{k\pi},2\sqrt{k\pi})$内的零点个数相同。

由于$\sin T^2=\sin k\pi=0$，所以函数$f(x)$在$(0,\sqrt{k\pi})$内有$k-1$个零点：$\sqrt{\pi}$，$\sqrt{2\pi}$，$\cdots$，$\sqrt{(k-1)\pi}$。而在区间$(\sqrt{k\pi},2\sqrt{k\pi})$里有$3k-1$个零点，这是因为

$$(2\sqrt{k\pi})^2-(\sqrt{k\pi})^2=3k\pi$$

的缘故，其零点：$\sqrt{(k+1)\pi}$，$\sqrt{(k+2)\pi}$，$\cdots$，$\sqrt{(4k-1)\pi}$。又因为$k>0$，故$k-1\neq 3k-1$，矛盾的出现说明了$f(x)=\sin x^2$不是周期函数。

例 7　证明：定义在对称区间$(-a,a)$内的任何函数$f(x)$可以表示为偶函数与奇函数之和。

证明　函数$f(x)$在$(-a,a)$内可表示为：

$$f(x)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(x)}{2}+\frac{f(-x)}{2}-\frac{f(-x)}{2}$$

$$=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\ \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

不难证明，函数$\varphi(x)$在区间$(-a,a)$内是偶函数，函数$\psi(x)$在区间$(-a,a)$内是奇函数，事实上。

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$=-\psi(x),$$

故函数 $f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内可以表示为一个偶函数 $\varphi(x)$ 与一个奇函数 $\psi(x)$ 之和。

例 8 已知 $\varphi(x)=\text{sgn}x$，$\psi(x)=\sin x$，求复合函数 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$。

解 $\varphi[\varphi(x)]=\text{sgn}(\text{sgn}x)=\text{sgn}x$。

$$\varphi[\psi(x)]=\text{sgn}(\sin x)$$

$$=\begin{cases}1, & \text{当}2n\pi<x<(2n+1)\pi\text{时}, \\ 0, & \text{当}x=n\pi\text{时}, \\ -1, & \text{当}(2n-1)\pi<x<2n\pi\text{时},\end{cases}$$

$(n=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots)$。

$\psi[\psi(x)]=\sin\sin x$，

$$\psi[\varphi(x)]=\sin(\text{sgn}x)=\begin{cases}\sin 1, & \text{当}x>0\text{时}, \\ 0, & \text{当}x=0\text{时}, \\ -\sin 1, & \text{当}x<0\text{时}.\end{cases}$$

例 9 回答下列各问题：

（1）设 $f(x)=1+x$，对任意的函数 $\varphi(x)$，$f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$ 成立吗？

（2）设 $f(x)$ 是常数，$\varphi(x)$ 取什么样的函数使 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$ 成立？

（3）证明：当 $f(x)=x$ 时，$f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$ 对任意的函数 $\varphi(x)$ 都成立。

基本思路 要用到常数函数 $f(x)=C$，它将横轴上的某一数集对应到纵轴上一点的特性，以及 $f(x)=x$，它将横轴上的某一数集对应到纵轴上同一数集的特性。

解（1）不成立，例如 $\varphi(x)=\sin x$，有

$$f[\varphi(x)]=1+\sin x\neq\sin(1+x)=\varphi[f(x)].$$

（2）只要取$\varphi(x)=x$即可。因为$f(x)=C$和$\varphi(x)=x$，所以

$$f[\varphi(x)]=f(x)=C,$$

而 $$\varphi[f(x)]=\varphi(C)=C,$$

故必有 $$f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)].$$

（3）因为$f(x)=x$，所以

$$f[\varphi(x)]=\varphi(x),$$

且有 $$\varphi[f(x)]=\varphi(x),$$

故有 $$f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)].$$

例10 画出下列函数的图象：

（1）$y=\operatorname{sgn}\operatorname{tg}x$；（2）$y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$，$x>0$；（3）$y=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，$x>0$。

基本思路 利用符号函数和最大整数函数的性质。

解（1）因为$\operatorname{tg}x$在区间$\left(k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内是正的；在区间$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi\right)$内是负的；在点 $x=k\pi$ 处是零。代入符号函数，有

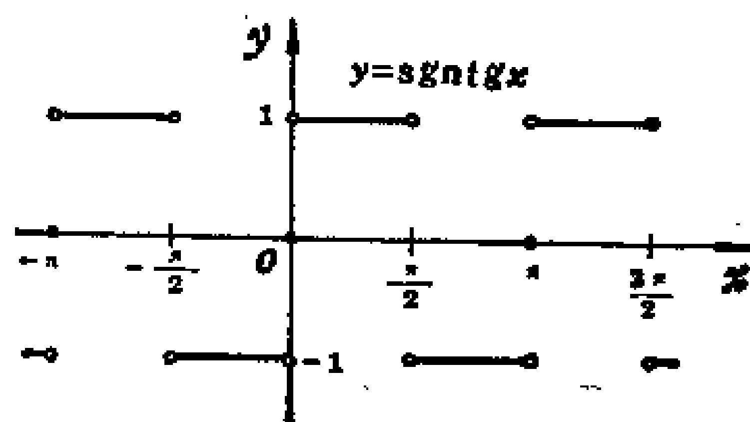


图1,32

$$y=\begin{cases}1, & \text{当}k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}\text{时,}\\ 0, & \text{当}x=k\pi\text{时,}\\ -1, & \text{当}k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi\text{时,}\end{cases}$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

其函数图象如图1.32示。

（2）因为讨论的是函数$\frac{1}{x}$的最大整数部分，所以有

$$y=\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}0, & \text{当}1<x<+\infty\text{时,}\\ 1, & \text{当}\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\text{时,}\\ 2, & \text{当}\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{1}{2}\text{时,}\\ 3, & \text{当}\dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{1}{3}\text{时,}\\ \vdots & \qquad\vdots\end{cases}$$

其函数图象如图1.33示。

（3）这是从双曲线 $y=\frac{1}{x}$，减去$\left[\frac{1}{x}\right]$，在图1.33的基础上不难画出函数 $y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$的图象，如图1.34示。

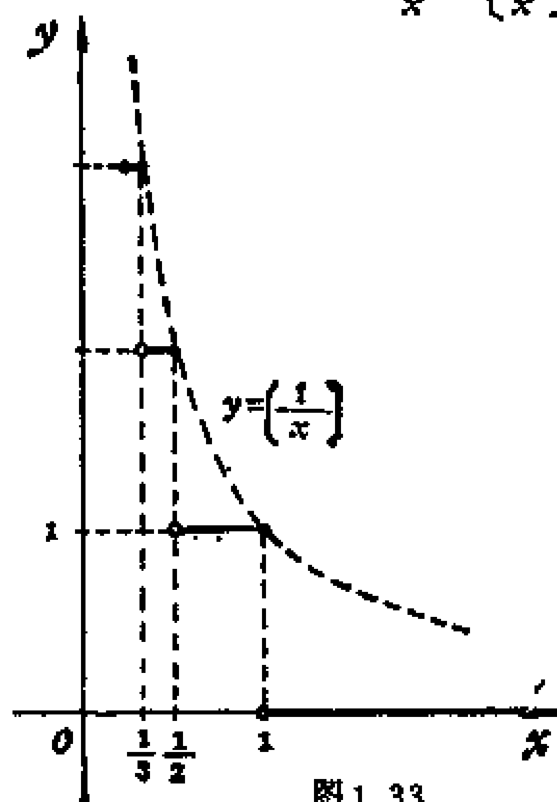


图1.33

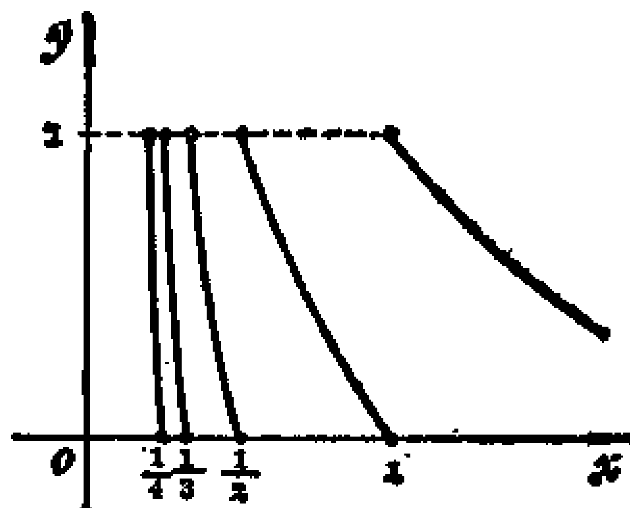


图1.34

例11　证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数。

证明　应用数学归纳法。当$n=1$时，要证明的不等式显然成立。设对n成立

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明$n+1$时也成立。两边同乘 $(1+x_{n+1})$，由于$x_{n+1}\geqslant -1$，则$1+x_{n+1}\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\ &\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\ &=1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n).\end{aligned}$$

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 符号相同，故

$$x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant 0,$$

由此得

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\ &\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}.\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

在贝努里不等式里，当$x_1=x_2=\cdots=x_n=x$时，不等式就成为

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ \ (当n\geqslant 1).$$

习　　题

§1.2

1．解下列不等式：

（1）$|3-2x|<x+4$；　　（2）$|2x+3|>1$；

（3）$|x|>|x-1|$；　　（4）$|x-1|>|2x-1|$；

（5）$|x+3|-|x-1|+3>0$；　　（6）$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$。

2．求满足下列等式的x的集合：

（1）$\left|\dfrac{1-x}{x+1}\right|=\dfrac{1-x}{x+1}$；　　（2）$|x^2-7x+12|=-(x^2-7x+12)$；

（3） $|x| = x+1$；　　　　　　　　（4） $|\sin x| = \sin x + 2$；

（5） $|2x+3| = x^2$。

3．证明不等式：

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|。$$

§1.3

4．求下列函数的定义域：

（1） $y=\sqrt{1-x^2}$；　　　　　　（2） $y=\dfrac{1}{\sqrt{2+3x-x^2}}$；

（3） $y=\lg(x+2)+\lg(x-2)$；　（4） $y=\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5}$；

（5） $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$；　　　　（6） $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

（7） $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$；　　　　　（8） $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$。

5．求下列函数在指定点的函数值：

（1）若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$；

（2）若 $f(x)=2^{x-2}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$；

（3）若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$；

（4）若 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & 当x<0时，\\ x-1 & 当x\geqslant 0时，\end{cases}$

求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

6．解方程：

（1）设 $f(x)=x^2-2x+3$，解方程 $f(x)=f(0)$ 和 $f(x)=f(3)$；

（2）设 $f(x)=1+x$，$\varphi(x)=x-2$，解方程 $|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$。

7．证明

（1）若 $f(x)=e^x$，则 $f(-x)\cdot f(x)-1=0$；

（2）若 $\varphi(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 则 $\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$；

（3）若$\varphi(\theta)=\text{tg}\theta$，则 $\varphi(a+b)=\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}$.

§1.4

8．画出下列函数的图形：

（1）$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\dfrac{1}{2}, & x<0;\end{cases}$　　（2）$y=\begin{cases}|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x>2\text{或}x<0;\end{cases}$

（3）$y=|\sin x|$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$；　　（4）$y=x^{\frac{2}{3}}$，$-\infty<x<+\infty$；

（5）$y=[\sqrt{x}]$；　　（6）$\left\{1+(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$，

§1.5

9．讨论下列函数的奇偶性：

（1）$y=e^{x^2}+\cos x$；　　（2）$y=\sin x-\cos x$；

（3）$y=\dfrac{x}{a^x-1}$；　　（4）$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$；

（5）$y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；　　（6）$y=a+b\cos x$.

10．讨论下列函数的周期性，对于周期函数指出其周期：

（1）$y=\sin\dfrac{1}{x}$；　　（2）$y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$；

（3）$y=\sin(x+1)$；　　（4）$y=\sqrt{\text{tg}x}$；

（5）$y=x-[x]$；　　（6）$y=\sin nx$.

11．讨论下列函数的单调性：

（1）$y=x^{\frac{1}{3}}$，$-\infty<x<+\infty$；　　（2）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$x>0$；

（3）$y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$，$x>0$；　　（4）$y=\text{sgn}\,\text{tg}x$.

12．讨论下列函数的有界性：

（1）$\left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，$x>0$；

（3）$y=2\sin 3x+1$；　　（4）$y=x^{\frac{1}{100}}$，$x>0$.

13．证明迪里赫列函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

任何有理数都是它的周期。

14．证明数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$是单调递增的，且有界。

§1.6

15．求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{x^2+1}$；　　（2）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

（3）$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$；　　（4）$y=1+\lg(x+2)$；

（5）$y=x^2+x$；　　（6）$y=\sqrt{1-x^2}$。

16．下列各复合函数是怎样复合而成的？

（1）$f(t)=2^{2^t}$（其中应注意，a^{b^c}意味着$a^{(b^c)}$）；

（2）$f(u)=\sin(2^u+2^{u^2})$；

（3）$f(y)=\sin(\sin(2^{2^{\sin y}}+1))$；

（4）$f(x)=2^{\sin^2 x}+\sin(x+1)^2+2^{\sin(x^2+\sin x)}$。

17．求下列复合函数的值：

（1）设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

（2）设$f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f(e^{-x})$；

（3）设$f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$；

（4）设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

18．设 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，问

（1）$f(x^2)$；　　（2）$f(\sin x)$；

（3）$f(x+a)$，$a>0$；　　（4）$f(x+a)+f(x-a)$，$a>0$

的定义域是什么？

§1.7

19．证明，幂函数 $y=x^{2n}$（$n=1, 2, \cdots$）在$(0,+\infty)$上是递增的。

20．证明，在$[-1,1]$上的任何x，恒有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

21. 证明，对于线性函数

$$f(x)=ax+b,$$

若自变量的诸值 $x=x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 组成一个等差数列，则对应的函数值 $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也组成一个等差数列.

22. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作出下列各函数的图形：

（1）$y=-f(x)$；（2）$y=f(-x)$；（3）$y=-f(-x)$.

第二章　极　　限

在第一章里，我们已指出，数学分析研究的对象是函数，那么数学分析用什么方法研究函数呢？这就是本章要讲的极限。数学分析中的所有的重要概念，如导数、偏导数、定积分、重积分等，都是建立在极限概念基础之上的，因此说极限概念贯穿于数学分析的始终。从方法论来说，数学分析应用极限方法研究函数是数学分析有别于初等数学的重要特征。

在这一章里，我们将要给出极限概念（数列极限和函数极限），讨论极限的性质和运算，以及极限存在的判别法。

§ 2.1　数列极限

一　极限思想

极限思想是人们在社会实践中总结出来的。我国古代的数学家们为之做出巨大的贡献。魏晋时数学家刘徽的“割圆术”明显地渗透了极限思想。

刘徽的“割圆术”是“割圆求周”的方法。他首先做圆的内接正六边形，并利用已知的半径求圆的内接正六边形的周长。再平分每个边所对的弧，做圆的内接正十二边形，又可求圆的内接正十二边形的周长（如图2.1）。用同样的方法继续做下去……。刘徽说：“割之弥细，所失弥少，割

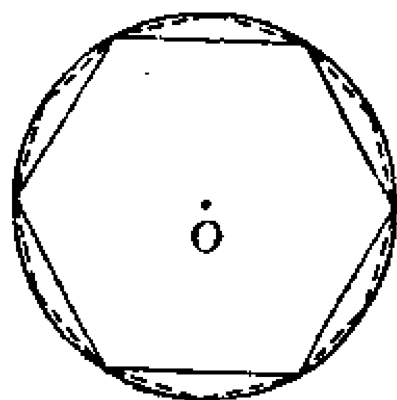


图2.1

之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”．这就是说，用圆的内接正多边形的周长代替圆的周长，其近似程度与被分割的圆的内接正多边形的边数有直接关系．当边数较少时，近似程度就差些，当边数较多时，近似程度就好些．当边数无限的增加时，圆的内接正多边形的周长就无限地趋近于圆的周长．

上述过程可总结如下：

分割的序号(n)	1	2	3	……	n	……	n无限增大
正多边形的边数($3\cdot2^n$)	$3\cdot2$	$3\cdot2^2$	$3\cdot2^3$	……	$3\cdot2^n$	……	边数无限倍增
正多边形的周长(l_n)	l_1	l_2	l_3	……	l_n	……	无限趋近于圆的周长l.

上述事实表明：圆的周长l本来是未知的，但是圆的周长l并不是一个孤立的量，它与该圆的已知的内接正多边形的周长数列$\{l_n\}$联系着．当数列$\{l_n\}$中的序号n无限增大时，数列$\{l_n\}$就无限趋近于圆的周长l．在任意一个有限过程，即对任意给定n，l_n都是圆的周长l的近似值，只有在无限的过程中，我们才能认识圆的周长l．这就是刘徽割圆术所包含的极限思想．

二　数列$\{1-\frac{1}{n}\}$的极限

数列$\{1-\frac{1}{n}\}$：　$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$.

在第一章里曾指出它是一个严格递增而且有界的数列．不难看出，数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$随着$n$的无限增大而渐趋稳定的变化趋势．也就是说当$n$无限增大时，数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$无限地趋近于

1．数 1 就是数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 的"极限"．然而，这种定性的描述不能满足数学中严谨论证的需要．为此我们通过分析的方法给出数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 无限地趋近于 1（当 n 无限增大时）的定量刻划．

当 n 无限增大时，数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 无限趋近于 1 的具体含意是：数列的通项 $1-\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值可以无限地变小，也就是两者间的距离可以无限地变小．现在进一步讨论无限变小的含意．

对给定的数 $\frac{1}{10}$，要想做到 $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\frac{1}{10}$，即 $\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，只须 $n>10$ 即可，就是说从数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 的第10项以后的所有项：$1-\frac{1}{11}$，$1-\frac{1}{12}$，$1-\frac{1}{13}$，……都能满足与 1 之差的绝对值小于 $\frac{1}{10}$ 的要求．

对给定的数 $\frac{1}{100}$，要想做到 $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\frac{1}{100}$，即 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，只须 $n>100$ 即可，就是说从数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 的第 100 项以后的所有项：$1-\frac{1}{101}$，$1-\frac{1}{102}$，$1-\frac{1}{103}$，……都能满足与 1 之差的绝对值小于 $\frac{1}{100}$ 的要求．

对给定的数 $\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{10000}$ 都可以做同样的叙述．然而，仅

对$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{10000}$这些确定的数刻划$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|$无限变小是不够的．为此必须对任意的 $\varepsilon>0$（其中包括任意小）都能做到$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon$ 才行，于是有：

对任意给定的 $\varepsilon>0$，要想做到$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon$，即$\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可．就是说从数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$的第 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$（因为$\frac{1}{\varepsilon}$不一定是整数）项以后的所有项：$1-\frac{1}{n_0+1}$，$1-\frac{1}{n_0+2}$，$1-\frac{1}{n_0+3}$，……都能满足与1之差的绝对值小于$\varepsilon$的要求．

于是，当 n 无限增大时，数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 无限趋近于1，它的定量描述是：

对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>n_0$时，有$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon$．

这句话共有四小段，一、四小段是说数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$的通项$1-\frac{1}{n}$与1之差的绝对值任意小；二、三小段是说在 n 无限增大的过程中，上述要求是能够做到的，即当 $n>n_0$ 时，就有$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon$．现列表如下：

对任意给定的	存在自然数	当…时	有
$\frac{1}{10}$	10	$n>10$	$\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right\|<\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	100	$n>100$	$\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right\|<\frac{1}{100}$
$\frac{1}{1000}$	1000	$n>1000$	$\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right\|<\frac{1}{1000}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$\varepsilon>0$	$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$	$n>n_0$	$\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right\|<\varepsilon$

三　数列极限概念

定义　设有数列$\{a_n\}$和数 a。如果对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在① 自然数 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$**存在极限**（**或收敛**），且极限为a（或**收敛于** a）记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \text{ 或 } a_n\to a \ (n\to\infty).$$

若数列 $\{a_n\}$ 不存在极限，则称数列$\{a_n\}$**发散**。

根据数列极限的定义，上段讨论的数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 存在极限，其极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1 \quad \text{或} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\to 1\ (n\to\infty).$$

数列极限有明显的几何意义。

数列 $\{a_n\}$ 的极限为a。将数 a 及数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再以 a 为中心以 ε 为半径截取两点 $a-\varepsilon$，$a+\varepsilon$（如图 2.2）。在§1.2 中曾指出，不

① 在以后的叙述中，也可以省去"总"字，即存在。

等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$



图2.2

与不等式

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

是等价的，所以当 $n > n_0$ 时，所有的点 a_n 都落在开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内，而只有有限个（至多有 n_0 个）点落在这个区间以外。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意小的。所以开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$的长度$2\varepsilon$也是任意小的，但是不论$2\varepsilon$多么小，其开区间内必含有所有的点：$a_{n_0+1}$，$a_{n_0+2}$，……，因此说点$a_{n_0+1}$，$a_{n_0+2}$，……凝聚在点 a 的附近。这就是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的几何意义。

四　对数列极限概念的几点说明

1　**ε 的作用**。就其极限的全过程而言，ε 必须具有任意性。因为只有这样才能保证 a_n 无限趋近于a，即 $|a_n - a|$ 是任意小。但是，就其极限全过程的某一时刻而言，ε 必须具有固定性，因为只有这样才能完成具体的定量刻划。如，$\varepsilon = \frac{1}{1000}$，存在自然数1000，当$n > 1000$时，才有

$$1 - \frac{1}{1001}, \quad 1 - \frac{1}{1002}, \quad \cdots\cdots$$

与 1 的距离小于$\frac{1}{1000}$。但是必须指出：ε 的任意性是绝对的，固定性是相对的，而绝对的任意性是通过无限多个相对的固定性来表现的。

2　**n_0 与 ε 的关系**。一般说来 n_0 与 ε 有着相依关系。从第二段的表格中可清楚地看出，当 ε 取得小些，对应的自

然数 n_0 就要大些．因为自然数 n_0 是随着 ε 的变化而变化，所以通常把这种相依关系记为：$n_0 = n_0(\varepsilon)$．

3　n_0 **不是唯一的**．上面我们仅仅指出 n_0 与 ε 的相依关系，但是这绝不意味着 $n_0(\varepsilon)$ 由 ε 唯一确定，这就是说，对于给定的 $\varepsilon>0$，所对应的 n_0 不只是一个．例如：当 $\varepsilon=\frac{1}{100}$ 时，从第二段的表中可以看出，自然数 $n_0=100$，当 $n>n_0$ 时，有 $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\frac{1}{100}$．然而，不难发现，把 n_0 取为101也可以，因为当 $n>n_0$ 时，也有 $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\frac{1}{100}$；把 n_0 取为150也可以，因为当 $n>n_0$ 时，也有 $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|<\frac{1}{100}$ 等等．因此说：n_0 不是唯一的．

4　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ **的否定叙述**．为了证明某些极限问题的需要，在此给出数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限的否定叙述，即数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限（$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$）的叙述，其中包括两种情况：一是 $\{a_n\}$ 有极限存在，但是极限不是 a；二是 $\{a_n\}$ 根本没有极限．否定的方法是将原定义中的不等号"<"改为不等号"≥"，将原定义中的"任意"改为"某个"，而将"某个"改为"任意"．对 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$ 叙述如下：

存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意的自然数 n，存在某个 $n_0>n$，有 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$．

为了更好地掌握两种形式的叙述，现对比如下：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Longleftrightarrow$ ①	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a \Longleftrightarrow$
对任意给定的 $\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在（某个）自然数 $n_0\in N$	对任意的自然数 n
当（任意）$n>n_0$ 时	存在某个 $n_0>n$
有 $\|a_n-a\|<\varepsilon$	有 $\|a_{n_0}-a\|\geqslant\varepsilon_0$

① 符号 $\Longleftrightarrow$ 表示"充分必要"或"等价"．

五 举 例

证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，就是看它是否符合极限定义，具体说来就是要证明：

对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当$n>n_0$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$。

这个证明关键在于对任意给定的$\varepsilon>0$，使$|a_n-a|<\varepsilon$成立的那样的n_0是否存在。如果存在了，当$n>n_0$时，必有$|a_n-a|<\varepsilon$。因此证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的步骤是：

（1）对任意给定的$\varepsilon>0$，建立不等式；

（2）解不等式，从中找出自然数n_0。在证明极限存在的问题中，这是最主要的一步；

（3）对任意给定的$\varepsilon>0$，和找出的n_0用极限定义再复述一遍。

例1　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

证明　对任意给定的$\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

得$n>\frac{1}{\varepsilon}$，由于$\frac{1}{\varepsilon}$不一定是正整数，故取$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$[①]。

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>$

---

① 当ε较小时，可使$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\geqslant1$，以后各例凡无特殊说明者皆如此。

当ε较小时，$\frac{1}{\varepsilon}$不一定是正整数，故取$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$。这样取就够用了，因为$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\leqslant\frac{1}{\varepsilon}<n_0+1$，当$n>n_0$时，就意味着$\frac{1}{\varepsilon}<n_0+1\leqslant n$，所以有$\frac{1}{n}<\varepsilon$。

n_0时，有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

例2 设数列 $\{a_n\}$ 是常数数列，即 $\{a_n\}=\{a\}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a=a$.

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，解不等式

$$|a_n-a|=|a-a|=0<\varepsilon.$$

显然，对任意的自然数 n，都有 $\varepsilon>0$，对此不妨取 $n_0=1$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数$n_0=1$，当$n>1$时，有 $|a_n-a|=|a-a|<\varepsilon$.

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n-1}=\frac{1}{3}$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{n+2}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon.$$

解得 $n>\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+1\right)$，故取 $n_0=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+1\right)\right]$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n_0=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+1\right)\right]$，当 $n>n_0$时，有 $\left|\frac{n+2}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

这里应当指出：$n_0=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+1\right)\right]$是从不等式$\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+1\right)$后而取的。根据 n_0 的不唯一性，对这类证明题，为使 n_0 的形式简单，可用“放大法”（或叫加强不等式）进一步简化不等式。例如

$$\frac{7}{3(3n-1)}<\frac{12}{6n+(3n-3)}\leqslant\frac{12}{6n}=\frac{2}{n}<\varepsilon,$$

解得 $n>\frac{2}{\varepsilon}$，故取 $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$.这样做是合理的，因为不等式 $\frac{2}{n}<\varepsilon$ 的解也必然满足不等式 $\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon$。 因此放大法可简化不等式，从而简化了运算．特别是解某些超越不等式放大法更为必要．究竟怎样放大，则应因题而异．

例 4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$。

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

解得 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$．取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>n_0$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon.$$

例 5　如果 $|q|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon.$$

两边取常用对数得

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon.$$

因为 $|q|<1$，所以 $\lg|q|<0$，两边除以 $\lg|q|$，得

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}.$$

取 $n_0=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$（只要 ε 取得足够小，总可使 $\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\geqslant1$）．

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n_0=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$，当

$n>n_0$ 时，有 $|q^n-0|<\varepsilon$.

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，其中 $a>0$.

证明 分三种情况证明：

（1）$a>1$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon,$$

因为 $a>1$,所以 $a^{\frac{1}{n}}>1$，从而有

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon, \text{ 或 } a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon.$$

两边取常用对数，得

$$\frac{1}{n}\lg a<\lg(1+\varepsilon),$$

最后解得 $n>\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}$，取 $n_0=\left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$（只要 ε 取得足够小，总可使$\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\geqslant 1$）.

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数 $n_0=\left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$，当 $n>n_0$ 时，有 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$.

（2）$a=1$. $a^{\frac{1}{n}}=1$，即 $\{a^{\frac{1}{n}}\}=\{1\}$是常数数列，由例2知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

（3）$0<a<1$. 这时令$\frac{1}{a}=b>1$，则有

$$\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|=\left|\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}-1\right|=\left|\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{b^{\frac{1}{n}}}\right|\leqslant\left|b^{\frac{1}{n}}-1\right|.$$

因为$b>1$，所以 $b^{\frac{1}{n}}>1$，与情况（1）相同，即有，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当 $n>n_0$ 时，有 $|b^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当$n>n_0$时，

有 $|a^{\frac{1}{n}}-1|\leqslant|b^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$。

例 7 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 是发散的。

因为数列是

$$-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$$

可见当 $n\to\infty$的过程中，$(-1)^n$ 时而为 1，时而为 -1，不可能与某个确定数任意靠近．现利用本节第四段极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的否定叙述证明之．

证明 对任意数 b，有$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq b$。

不妨设 $b>0$。存在某一个 $\varepsilon_0=1$，对任意的自然数n，存在 $n_0=2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$，当 $n_0>n$时，有 $|(-1)^{n_0}-b|=1+b>\varepsilon_0=1$，即当$n\to\infty$时，$(-1)^n$ 不趋向b。

例 8 证明，如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即对任意给当的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。当然对同一个 $\varepsilon>0$，又存在 $n_0'\in N$，当 $n>n_0'$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon\cdot\sqrt{a}$。

又因为有

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|$$

$$=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}},$$

所以，对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0'\in N$，当 $n>n_0'$ 时，有

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon.$$

于是，由极限的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}.$$

例 8 表明：当 $n\to\infty$时，有 $a_n\to a$，也有$\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$。例如，当 $n\to\infty$时，如有 $1+\frac{1}{n}\to1$，也有$\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to\sqrt{1}=1$。

§ 2.2 收敛数列的性质及四则运算

一 收敛数列的性质

定理2.1 （有界性）如果数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$必有界。

证明 因为数列$\{a_n\}$收敛，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。根据极限定义，可取定$\varepsilon=1$，存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，有$|a_n-a|<1$。从而当$n>n_0$时，有不等式

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_0}|,1+|a|\}$①，则对任意$n\in N$有$|a_n|\leqslant M$。故数列$\{a_n\}$有界。 □

定理2.1表明，收敛数列必有界，即有界是收敛的必要条件。当必要条件得不到满足时，数列肯定发散。因此，收敛必有界与无界必发散是等价的。利用数列收敛的必要条件可以判别某些数列的发散性。例如，数列$\{n-(-1)^n n\}$是无界的，事实上，对任意的$M>0$，存在自然数$n_0=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$，当$n>n_0$时，有

$$|n-(-1)^n\cdot n|=2n>M,$$

这只要取$n_0>\dfrac{M}{2}$，当奇数$n>n_0$时，有$2n>M$，故数列$\{n-(-1)^n n\}$发散。

然而定理2.1的逆命题不成立，上一节的例7是有界数列，但是发散。

---

① $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_0}|,1+|a|\}$表示$M$是$|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_0}|,1+|a|$中最大者．max是maximum的缩写，最大的意思，min是minimum的缩写，最小的意思。

定理2.2 （保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $a_n>0$（或 $a_n<0$）。

证明 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，由极限定义，取定 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，存在自然数 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{a}{2},$$

或
$$-\frac{a}{2}<a_n-a<\frac{a}{2},$$

由此得
$$a_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2},$$

因为$\frac{a}{2}>0$，故当 $n>n_0$ 时有$a_n>0$。 □

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<0$ 的情形留给读者作为练习。

推论（不等式性质）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $a_n<0$（或$a_n>0$），则有 $a\leqslant0$（或 $a\geqslant0$）。

证明 用反证法．假设 $a>0$（或 $a<0$）．根据定理2．2知，存在自然数 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有$a_n>0$（或($a_n<0$)．这与题设的当 $n>n_0$ 时有 $a_n<0$（或 $a_n>0$）矛盾．故有 $a\leqslant0$（或 $a\geqslant0$）。 □

定理2.3 （唯一性）如果数列$\{a_n\}$收敛，则极限必唯一。

证明 假设数列 $\{a_n\}$ 存在两个极限 a 和 b，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$．根据极限定义，对任意给定的$\varepsilon>0$，分别有

存在自然数$n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

存在自然数 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有 $|a_n-b|<\varepsilon$.

取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 和 } |a_n-b|<\varepsilon.$$

于是，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a-b|=|a-a_n+a_n-b|\leqslant|a_n-a|+|a_n-b|<$$

$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$ ①

因为 2ε 是任意，其绝对值比任意正实数还小的数只有 0，故 $a=b$，即极限唯一。 □

二 收敛数列的四则运算

定理2.4 如果数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆收敛，则它们的和、差数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在自然数 $n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

存在自然数 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon$.

取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 和 } |b_n-b|<\varepsilon.$$

当 $n>n_0$ 时，故有

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|=|(a_n-a)\pm(b_n-b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

由数列极限定义知，数列 $\{(a_n+b_n)\}$ 和 $\{(a_n-b_n)\}$ 均收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n.$$ □

定理 2·4 表明：代数和的极限等于极限的代数和。

定理2.5 如果数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆收敛，则数列 $\{a_nb_n\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

分析 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，知 $|a_n-a|$ 与 $|b_n-b|$

---

① ε是任意的正数，当然2ε，$\frac{\varepsilon}{3}$，$c\cdot\varepsilon(c>0$，常数），$\sqrt{\varepsilon}$，ε^2，…… 也都是任意正数。

是任意小。往证 $|a_nb_n-ab|$ 也是任意小。为此，在 $|a_nb_n-ab|$ 中。同时加减一个数，将 $|a_nb_n-ab|$ 变形，再利用放大法使之不等式仅含有 $|a_n-a|$ 与 $|b_n-b|$ 的因子，根据已知条件即可证明。

证明 由于数列$\{a_n\}$收敛，根据定理 2．1 知，数列 $\{a_n\}$ 有界，即存在一个数$M>0$，使

$$|a_n|\leqslant M,\quad n\in N.$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在自然数 $n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

存在自然数 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon$.

取$n_0=\max\{n_1,n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 与 } |b_n-b|<\varepsilon.$$

于是当 $n>n_0$ 时，有

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab| &= |a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\\ &\leqslant |a_n|\ |b_n-b| + |b|\ |a_n-a| < M\cdot\varepsilon+|b|\cdot\varepsilon\\ &=(M+|b|)\cdot\varepsilon\end{aligned}$$

其中 $M+|b|$ 为正的常数，由数列极限的定义知，数列$\{a_nb_n\}$收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad \square$$

定理 2.5 表明：**乘积的极限等于极限的乘积。**

推论 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{ca_n\}$ 也收敛(c为常数)，且有

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}a_n.$$

推论的证明是明显的，只要把常数 c 视为常数数列，利用定理 2.5 即可证明。

推论表明：**常数因子可以挪到极限符号外面来。**

引理 如果数列 $\{b_n\}$ 收敛，且 $b_n\neq0$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$，则数

列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

分析 根据$\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$，利用极限定义，证明对于充分大的 n 数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 有界。另外利用 $|b_n-b|$ 能任意小的条件，证明

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b_nb|}\ |b_n-b|=\frac{1}{|b_n|\ |b|}\ |b_n-b|$$

也能任意小。

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 根据极限的定义，有

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$，所以根据极限的定义有，取定 $\varepsilon_0=\frac{|b|}{2}>0$，存在 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有 $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$. 又有

$$|b_n|=|b_n-b+b|\geqslant|b|-|b_n-b|,$$

当$n>n_2$ 时，有 $|b_n|\geqslant|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}$ 或 $\frac{1}{|b_n|}\leqslant\frac{2}{|b|}$. 取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b_n|\ |b|}\ |b_n-b|<\frac{2}{|b|^2}\cdot\varepsilon,$$

其中的$\frac{2}{|b|^2}$是正常数. 由数列极限的定义知，数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \qquad \square$$

定理2.6 如果数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆收敛，且 $b_n\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，则数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

证明 由定理2.5和引理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \qquad \square$$

定理2.6表明：**商的极限等于极限的商。**

不难用数学归纳法将定理2.4，定理2.5推广到m个收敛数列的情形：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}\pm a_n^{(2)}\pm\cdots\pm a_n^{(m)})=\lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}\pm\lim_{n\to\infty}a_n^{(2)}\pm\cdots\pm\lim_{n\to\infty}a_n^{(m)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}\cdot a_n^{(2)}\cdots a_n^{(m)})\ \lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}\cdot\lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}a_n^{(m)}.$$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^m}$（其中$m$为某个自然数）。

解 利用推广的乘积极限运算和上节的例1$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\right)$，

不难推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^m}=0$。

事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}=\lim_{n\to\infty}\overbrace{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\right)}^{m\text{个}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$=0\cdot0\cdot\cdots0=0.$$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-n}{5n^3-1}$。

解 将分式的分子分母同除 n^3，得

$$\frac{3n^3+n^2-n}{5n^3-1}=\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^3}}.$$

利用定理 2.4 定理2.6和例 1，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-n}{5n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}$$

$$=\frac{3+0-0}{5-0}=\frac{3}{5}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k^n+(k+1)^n}{k^{n+1}+(k+1)^{n+1}}$ (k 是正常数)

解 由§2.1 的例 5 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n+(k+1)^n}{k^{n+1}+(k+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)^n\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^n+1\right]}{(k+1)^{n+1}\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}+1\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1}\frac{\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n}+1\right]}{\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{k+1}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n}+1\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{k+1}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n}+\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{1}{k+1}\,\frac{0+1}{0+1}=\frac{1}{k+1}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解　因为 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1.$$

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^{2}}$.

解　因为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n-1)}{2}$，所以得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解　因为

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

根据§2.1的例 8，所以有

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{0}{2}=0.$$

§ 2.3　数列极限存在判别法

在§2.1中，我们所列举的数列极限的例子都是给出了它们的极限，然后根据极限的定义予以证明。在§2.2中，我们讨论收敛数列的性质和四则运算。在极限理论中，一个重要的问题是如何判别一个数列的收敛或发散。为此，首先介绍数集的确界概念。

一　确　　界

定义　设 E 是一个数集．如果能找到一个数 M，使数集 E 中的一切数 x，有 $x\leqslant M$（或 $M\leqslant x$），则称数集 E **有上界**（或

有下界），且把数M叫做数集E的上界（或下界）。如果一个数集既有上界又有下界，则称数集E有界。

例如，数集 $G=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\ \middle|\ n=1,2,\cdots\right\}$ 是有界的。

因为，可取 $M=1$，且G中任意数都小于1，所以有上界；再取$M=-1$，且E中任意数都大于-1，所以有下界。

一切自然数所成的数集，有下界，而无上界。显然，1或比1小的数都是它的下界。

一切整数所成的数集，既无上界，又无下界。

从数集的上、下界的定义和例子中不难发现，如果一个数集有上界，则它有无穷多个上界。例如，1是数集 $G=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\ \middle|\ n=1,2,\cdots\right\}$上界，而1.5，2，$\pi$，100 等等都是它的上界。如果一个数集有下界，则它有无穷多个下界。例如，-1是数集 $G=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\ \middle|\ n=1,2,\cdots\right\}$的下界，而$-1.2$，$-2$，$-e$，$-50$等等都是它的下界。对此，我们很自然的想到，在无穷多个上界或下界中，有没有最小上界和最大下界呢？

定义 设有一数集E，如果存在一个数β，满足下列条件：

（1）E中的任何一个数 $x\leqslant\beta$；

（2）对任意给定的 $\varepsilon>0$，至少存在一个数$x_0\in E$，使 $x_0>\beta-\varepsilon$，

则称数β为数集E的上确界，记为

$$\beta=\sup E \text{ 或 } \beta=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

定义中的第一个条件说的是：β是E的上界；第二个条件说的是：凡比β小的任何数都不是E的上界。于是，上确界β就是E的最小上界。

定义 设有一数集E，如果存在一个数α满足下列条件：

（1）E中的任何一个数$x \geqslant \alpha$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，至少存在一个数$x_0 \in E$，使

$x_0<\alpha+\varepsilon$，

则称数α为数集E的下确界，记为

$$\alpha=\inf E \text{ 或 } \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}.$$

定义中的第一个条件说的是：α是E的下界；第二个条件说的是：凡比α大的任何数都不是E的下界。于是，下确界α就是E的最大下界。

例1 证明数集$E=\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n \text{ 是自然数}\right\}$的上确界是1，下确界是$\frac{1}{2}$。

证明 （1）因为$n+1>n$，所以E中的任意数$\frac{n}{n+1}<1$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，在数集E中必存在一个数$\frac{n_0}{n_0+1}$（只要n_0充分大），使

$$\frac{n_0}{n_0+1}>1-\varepsilon.$$

事实上，从不等式$\frac{n}{n+1}>1-\varepsilon$中容易解得$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，只要取自然数$n_0>\frac{1}{\varepsilon}-1$，有

$$\frac{n_0}{n_0+1}>1-\varepsilon.$$

由上确界的定义，故$\sup E=1$。

同样地，（1）E中的任意数$\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{1}{2}$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，只要取$n_0=1$，就有

$$\frac{n_0}{n_0+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

由下确界的定义，故$\inf E=\frac{1}{2}$.

例2　闭区间$[a,b]$和开区间(a,b)的上确界都是b，下确界都是a。

证明　我们不妨证明开区间的情形，而闭区间的情形留作练习。

（1）任何的$x\in(a,b)$，都有$x<b$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，由实数的稠密性，必存在$x_0\in(a,b)$，使之$b-\varepsilon<x_0<b$. 所以b是(a,b)的上确界。同样可证a是(a,b)的下确界。

例3　由5个数所组成的数集$\{-5,0,3,9,13\}$，它的上确界为13，下确界为-5。

证明　（1）数集中任何一个数$x\leqslant13$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，数集中存在着数$x_0=13$，使之

$$13-\varepsilon<x_0=13.$$

故13是数集的上确界。

同样可证，-5是数集的下确界。

上述例子表明，一个数集的上、下确界可以属于这个数集，也可以不属于这个数集。显然，有上（下）确界的数集必有上（下）界。反之，有上（下）界的数集也必有上（下）确界，这就是下面的确界公理。

确界公理　有上界（或下界）的数集必有唯一的上确界（或下确界）。

二　两个判别法

定理2.7　（两边夹）如果存在$k\in N$，当$n>k$时，有

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$。

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在 $n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有$|a_n-l|<\varepsilon$ 或 $l-\varepsilon<a_n$；

存在 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有$|c_n-l|<\varepsilon$ 或$c_n<l+\varepsilon$。

取 $n_0=\max\{k, n_1, n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，同时有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,\quad l-\varepsilon<a_n \text{ 与 } c_n<l+\varepsilon,$$

于是有 $l-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant c_n<l+\varepsilon$,

$$l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon,$$

即 $|b_n-l|<\varepsilon$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$。 □

推论 如果存在$k\in N$，当 $n>k$ 时，有

$$l\leqslant b_n\leqslant c_n \text{（或 } a_n\leqslant b_n\leqslant l\text{）},$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=l$（或$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$），则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=l$。

应用定理 2.7，只要注意 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty} l=l$（或$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} l=l$）就可以了。

定理 2.7 也称为迫敛性法则。

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$。

解 当 $n\geqslant k$ 时，有 $n(k-1)\geqslant k(k-1)=k^2-k$，即

$$nk-k^2+k\geqslant n \text{ 或 } k(n-k+1)\geqslant n.$$

当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，分别有

$$1\cdot n\geqslant n,\ 2(n-1)\geqslant n,\ 3(n-2)\geqslant n,\cdots, n\cdot 1\geqslant n.$$

将这 n 个不等式左右两端分别相乘，有

$$(n!)^2\geqslant n^n \text{ 或 } \sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n},$$

即 $$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，根据定理 2.7 的推论得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　对任意的 $n\in N$，有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$<\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,$$

且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，根据定理 2.7 的推论，故得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 6　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，$a$ 是正常数.

证明　因为 a 是正常数，故必存在$k\in N$，使之$a\leqslant k$，从而得

$$1\geqslant\frac{a}{k}>\frac{a}{k+1}\cdots.$$

当 $n>k$ 时，有

$$0<\frac{a^n}{n!}=\left(\frac{a}{1}\ \frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1}\ \ \frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}\right)$$

$$<\left(\frac{a^k}{k!}\right)\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}=\frac{a^k}{k!}\ \frac{(k+1)^k}{a^k}$$

$$\cdot\left(\frac{a}{k+1}\right)^n=\frac{(k+1)^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^n,$$

即　　$$0<\frac{a^n}{n!}<\frac{(k+1)^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^n.$$

因为k是常数，所以$\frac{(k+1)^k}{k!}$也是常数，又因为$0<\frac{a}{k+1}$ <1，由§2.1的例5，因此有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{k+1}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^n=0.$$

再根据定理2.7的推论最后得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

例7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 因为对任意的 $n\in N$，有 $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$，所以令 $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$，且有 $\alpha_n\geqslant 0$ 和 $n=(1+\alpha_n)^n$.

利用二项式定理，有

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2.$$

即 $$n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\alpha_n^2<\frac{2}{n-1} \text{或} \quad 0\leqslant\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

由§2.1的例4知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n-1}}=0$. 根据定理2.7的推论得

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0,$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

定理2.8（单调有界定理） 单调有界数列必有极限。

证明 不妨设数列$\{a_n\}$是递增有上界。根据确界公理知，

数集$\{a_n\}$必存在唯一的上确界 $\beta=\sup\{a_n\}$。现证明 β 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$。

由上确界的定义知，（1）$a_n\leqslant\beta$，$n\in N$；（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，在数集 $\{a_n\}$ 中至少存在一个数a_{n_0}，使$a_{n_0}>\beta-\varepsilon$。又因为数列$\{a_n\}$是递增的，因此，当 $n>n_0$ 时，有$a_n\geqslant a_{n_0}$，从而有 $a_n>\beta-\varepsilon$。于是当 $n>n_0$ 时，有

$$\beta-\varepsilon<a_n\leqslant\beta<\beta+\varepsilon,$$

即
$$|a_n-\beta|<\varepsilon,$$

根据极限的定义，故知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$。 □

完全类似，可证明数列 $\{a_n\}$ 是递减的、严格递增（或严格递减）的情形。

例 8　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}(a>0)$。

解　令$x_n=\dfrac{a^n}{n!}$，有

$$x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{a}{n+1}=x_n\cdot\frac{a}{n+1},\quad(1)$$

当$\dfrac{a}{n+1}<1$时（即 $n>a-1$时），就能保证数列 $\{x_n\}$ 是严格递减的。又因为 $x_n>0$，$n\in N$，所以当$n>a-1$时，数列 $\{x_n\}$ 是严格递减，且有下界。根据定理 2.8 知，数列$\{x_n\}$ 必存在极限，并设此极限为 l。

现求 l。因为数列$\{x_n\}$收敛，且极限为 l，所以有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=l,$$

对（1）式，故有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}$$

即
$$l=l\cdot0.\quad(2)$$

为使（2）成立，只有 $l=0$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

例 9　证明数列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots\cdots,$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 个根号}},\ \cdots\cdots$$

是收敛的，并求其极限.

证明　令 $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 个根号}}$，首先证明数列$\{x_n\}$是收敛的.

从数列本身不难看出，$x_2=\sqrt{2+x_1}>\sqrt{2}=x_1$，今设$x_n>x_{n-1}$，往证 $x_{n+1}>x_n$ 即可。事实上，

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}=x_n$$

故知数列是严格递增的. 现在证明它有上界，由于

$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\quad 或\quad x_n^2=2+x_{n-1}. \tag{3}$$

因为 $x_n>0$，所以有

$$x_n=\frac{2}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n},$$

又因 $x_{n-1}<x_n$，所以 $\frac{x_{n-1}}{x_n}<1$，故得

$$x_n<\frac{2}{x_n}+1.$$

由于数列$\{x_n\}$是严格递增的，对于每一个自然数 n，就有 $x_n\geqslant\sqrt{2}$，即 $\frac{2}{x_n}\leqslant\sqrt{2}$. 于是，对 $n\in N$，有

$$x_n\leqslant\sqrt{2}+1,$$

故知数列 $\{x_n\}$ 有上界，根据定理 2.8 知，数列 $\{x_n\}$ 必有极

限。

最后，求 $\{x_n\}$ 的极限。设数列 $\{x_n\}$ 的极限为 l，对（3）式两边取极限，得

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} + \lim_{n\to\infty} 2,$$

即
$$l^2 = l + 2.$$

解二次方程，其正根（因 $x_n>0$，$n\in N$，舍去负根）为：

$$l = \frac{1+\sqrt{1+8}}{2} = 2;$$

故有
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 个根号}} = 2.$$

例10 证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛。

证明 设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。首先证明数列 $\{x_n\}$ 是严格递增的。根据二项式定理有

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
$$\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1+1$$
$$+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

同样可将 x_{n+1} 展开，即上式中的 n 换成 $n+1$，得

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较 x_{n+1} 与 x_n，不难发现，x_{n+1}不仅比 x_n 多一项

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right),$$

而且此项为正，因为$\frac{i}{n+1}<1(i=1,2,\cdots,n)$．而且，$x_{n+1}$和 x_n从第三项起，每项中的对应因子有如下关系

$$1-\frac{i}{n}<1-\frac{i}{n+1}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

由此可知，$x_n<x_{n+1}$，故数列$\{x_n\}$是严格递增的．

其次证明数列$\{x_n\}$是有上界的．

在 x_n 的展开式中，由于所有的圆括号的因子都小于1，且有

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

又因为有

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\leqslant\frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$(k=2,\ 3,\ \cdots,n),$$

于是 $$x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2+1-\frac{1}{2^{n-1}}<3,\text{ 其中 } n\in N,$$

即数列$\{x_n\}$有上界。

根据定理 2.8 知，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛。常用字母 e 表示它的极限。即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

数 e 是个无理数，它的前15位小数是

$$e=2.718281828459045\cdots.$$

三　柯西收敛准则[①]

上段我们给出的两个定理，即数列的收敛判别法，其条件都是充分的。下面给出数列收敛的充分必要条件，就是所谓的柯西收敛准则。

定理2.9(柯西收敛准则)　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 当$n_1, n_2>n_0$时，有 $|a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon$.

证明　必要性　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 由极限的定义知，对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 当 n_1, $n_2>n_0$, 有

$$|a_{n_1}-a|<\varepsilon \text{ 与 } |a_{n_2}-a|<\varepsilon.$$

于是有

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|=|a_{n_1}-a+a-a_{n_2}|\leqslant|a_{n_1}-a|+|a_{n_2}-a|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$ □

定理的充分性留到第七章证明。

柯西收敛准则还有另一种常用的形式：

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 当 $n>n_0$ 时，且对任意的 $P\in N$, 有 $|a_{n+P}-a_n|<\varepsilon$.

---

① 柯西：Cauchy, A.L., 法国数学家，1789—1857。

柯西收敛准则指出：数列 $\{a_n\}$ 收敛等价于数列$\{a_n\}$ 充分远的任意二项 a_{n_1} 与 a_{n_2} 的距离能够任意小。柯西收敛准则只依赖于数列本身，不需要借助数列以外的数就能判别数列的收敛性。因此柯西收敛准则深刻地揭示了收敛数列的本质属性。

为了更好地掌握和应用柯西收敛准则，现将正、否叙述列表对比如下：

数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$	数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow$
任意给定的 $\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在（某个）$n_0\in N$	对任意的$n\in N$
当（任意）$n_1,n_2>n_0$ 时	存在（某个）$n_1,n_2>n$
有 $\lvert a_{n_1}-a_{n_2}\rvert<\varepsilon$	有 $\lvert a_{n_1}-a_{n_2}\rvert\geqslant\varepsilon_0$

例11 证明数列 $x_1=1$, $x_2=1+\frac{1}{2^2}$, $\cdots$, $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, $\cdots$是收敛的。

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，讨论

$$\lvert x_{n_1}-x_{n_2}\rvert.$$

为此，不妨假定 $n_1>n_2$，并注意 $\frac{1}{K^2}<\frac{1}{K(K-1)}=\frac{1}{K-1}-\frac{1}{K}$.

这时有

$$\lvert x_{n_1}-x_{n_2}\rvert=\frac{1}{(n_2+1)^2}+\frac{1}{(n_2+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n_1^2}$$

$$<\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_2+1}\right)+\left(\frac{1}{n_2+1}-\frac{1}{n_2+2}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{n_1-1}-\frac{1}{n_1}\right)=\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}<\frac{1}{n_2}<\varepsilon.$$

解得 $n_2>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in N$，当 $n_1>n_2>n_0$ 时，有

$$|x_{n_1}-x_{n_2}|<\varepsilon,$$

根据柯西收敛准则知数列收敛。

例11表明：由于不等式 $|a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon$ 含有两个任意的自然数，要想从中找出 $n_0\in N$ 是困难的。本题使用了不等式 $\frac{1}{K^2}<\frac{1}{K(K-1)}=\frac{1}{K-1}-\frac{1}{K}$，且在此基础上又利用了不等式 $\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}<\frac{1}{n_2}$，使不等式仅含一个 n_2，从而解得 $n_2>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$。

例12　若数列 $\{x_n\}$ 对任意的 $n\in N$，有 $|x_{n+1}-x_n|<cr^n$，其中 c 是正常数，$0<r<1$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，讨论

$$|x_{n+P}-x_n|,$$

其中任意的 $P\in N$。为此有

$$\begin{aligned}|x_{n+P}-x_n| &= |x_{n+P}-x_{n+P-1}+x_{n+P-1}-x_{n+P-2}+x_{n+P-2}+\cdots\\&\quad+x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant |x_{n+P}-x_{n+P-1}|+|x_{n+P-1}-x_{n+P-2}|+\cdots+\\&\quad|x_{n+1}-x_n|\\&<cr^{n+p-1}+cr^{n+p-2}+\cdots+cr^n\\&=cr^n(1+r+r^2+\cdots+r^{p-1})\\&=cr^n\frac{1-r^p}{1-r}=cr^n\left(\frac{1}{1-r}-\frac{r^p}{1-r}\right)\\&<\frac{c}{1-r}\cdot r^n<\varepsilon,\end{aligned}$$

解得　$r^n<\frac{(1-r)}{c}\varepsilon$。

取常用对数　$n\lg r<\lg\frac{(1-r)\varepsilon}{c}$.

因为 $0<r<1$，所以$\lg r<0$. 从而解得

$$n>\frac{\lg\frac{(1-r)\varepsilon}{c}}{\lg r}，取 n_0=\left[\frac{\lg\frac{(1-r)\varepsilon}{c}}{\lg r}\right].$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，且任意的$P\in N$，有 $|x_{n+P}-x_n|<\varepsilon$. 根据柯西收敛准则，故数列$\{x_n\}$ 收敛。

例13　若 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则数列 $\{x_n\}$ 发散。

证明　根据柯西收敛准则的否定叙述，为此取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意的$n\in N$，取某个 $n_0>n$，以及 $P=n_0$，则有

$$|x_{2n_0}-x_{n_0}|=\left|\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}\right|>\underbrace{\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}+\cdots+\frac{1}{2n_0}}_{n_0个}$$

$$=\frac{n_0}{2n_0}=\frac{1}{2}.$$

由柯西收敛准则的否定叙述，故数列$\{x_n\}$发散。

四　子数列

为了进一步研究数列极限的需要，下面讨论子数列。

定义　已知数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

从中选一数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots,$$

其下标应满足条件

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots,\quad n_k\in N(k=1,2,\cdots),$$
称数列 $\{a_{n_k}\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的**子数列**。

例如，在数列$\{a_n\}$中选出

$$a_{11},\ a_{15},\ a_{16},\ a_{25},\ a_{28},\cdots\cdots$$

其中$11<15<16<25<28<\cdots$，且$11,15,16,25,28\cdots\in N$，此数列是原来数列$\{a_n\}$的子数列。

特别地，把数列 $\{a_n\}$ 的子数列$\{a_{2n-1}\}$，即

$$a_1,\ a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的**奇子列**。而把子数列 $\{a_{2n}\}$，即

$$a_2,\ a_4,\cdots a_{2n},\cdots$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的**偶子列**。

定理2.10 如果数列$\{a_n\}$收趋于 a，则 $\{a_n\}$ 的任意子数列也收敛于 a。

证明 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，根据极限定义，有

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。

在子数列定义中，下标数列$\{n_k\}$也是无限增大的，对上述定义中所找到的 n_0，在数列$\{n_k\}$中一定存在自然数 k_0，当$k>k_0$ 时，有 $n_k>n_0$，由上述定义有

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $k_0\in N$，当 $k>k_0$时，有

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

亦即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$。 □

定理2.10的等价命题还有：如果数列 $\{a_n\}$ 的某个子数列 $\{a_{n_k}\}$ 发散，则数列 $\{a_n\}$ 也发散；以及，如果数列 $\{a_n\}$ 的两个子数列不收敛于同一极限，则数列 $\{a_n\}$ 发散。事实上，假设数列 $\{a_n\}$ 收敛，根据定理 2.10，可推得两个子数列都收敛，且其极限都与数列 $\{a_n\}$ 的极限相同，可见与已知条件矛盾。这两个等价命题对判别某些数列发散性很有用。

例如，我们不难看出数列$\{n+(-1)^n n\}$的偶子列为：4,8,…,2n,…，是无界数列，必发散，根据定理2.10的等价命题知数列$\{n+(-1)^n n\}$发散.

我们也不难看出数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \cdots$$

的奇子列以0为极限，偶子列以1为极限. 根据定理2.10的等价命题知，该数列发散.

§ 2.4 函数极限

以上我们讨论了定义在自然数集N上的一类特殊的函数极限——数列极限. 现在转向讨论一般的函数极限。

一 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

在§2.1里，我们研究了数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$的极限，即当

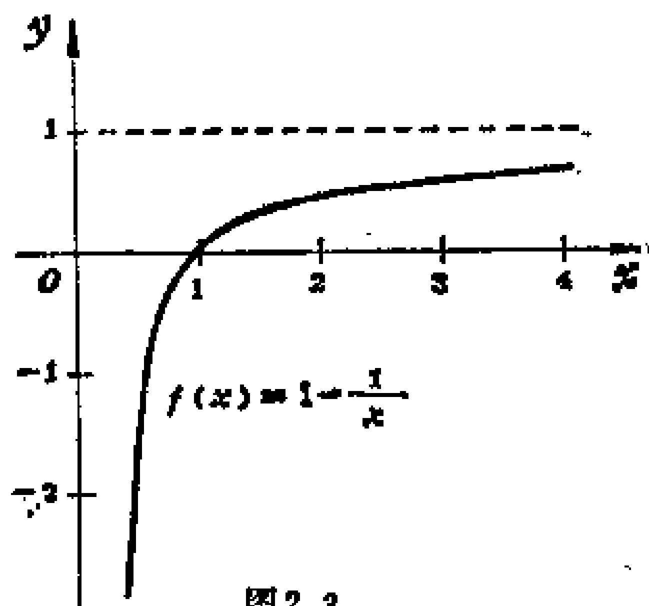


图2.3

$n\to\infty$时，$\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 1$. 现在考察定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)=1-\frac{1}{x}$. 显然，当$x$无限增大时，函数$f(x)=1-\frac{1}{x}$

无限地趋近于1（如图 2.3）．它也可作定量的刻划．由于

$$|f(x)-1| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x},$$

当 $\varepsilon=\frac{1}{10}$时，要想做到 $|f(x)-1| = \frac{1}{x}<\frac{1}{10}$，只须 $x>10$ 即可。

当 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$时，要想做到 $|f(x)-1| = \frac{1}{x}<\frac{1}{1000}$，只须 $x>1000$ 即可．

对任意给定的$\varepsilon>0$，要想做到$|f(x)-1| = \frac{1}{x}<\varepsilon$，只须 $x>\frac{1}{\varepsilon}$即可．这就是说，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$以1为“极限”．

现对一般情形的函数极限定义如下：

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有定义，且存在实数A．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数$X_\varepsilon\in R$，当 $x>X_\varepsilon$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时**存在极限**（或**收敛**），且极限为A（或收敛于A），记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

这种函数极限与数列极限的基本思想是一样的，所不同之处，在数列极限中自变量n只取正整数，是离散地无限增大。而在函数极限中自变量x可取任意的实数，是连续地无限增大。

关于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的否定叙述与数列的$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的否定叙述完全类似，这里不必赘述。

为了更好地理解和掌握两个概念，特列表对比如下：

记号	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或$a_n \to a(n\to\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$
函数	a_n	$f(x)$
定义域	自然数集N	$(a, +\infty)$
自变量变化趋势	$n\to\infty$	$x\to+\infty$
函数变化趋势	$a_n\to a$	$f(x)\to A$
定义	对任意给定 $\varepsilon>0$ 存在自然数 $n_0\in N$ 当 $n>n_0$ 时 有$\|a_n-a\|<\varepsilon$	对任意给定$\varepsilon>0$ 存在正数$X_0\in R$ 当 $x>X_0$ 时 有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$

由于不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ 与 } A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

是等价的。不难对极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$予以几何说明。"对任意给定的 $\varepsilon>0$"，就是以直线 $y=A$ 为中心，以直线 $y_1=A-\varepsilon$，$y_2=A+\varepsilon$ 为边界，其宽度为 2ε 的带形区域。由于 ε 的任意性，其带形区域的宽度 2ε 也是任意的。"总存在正数

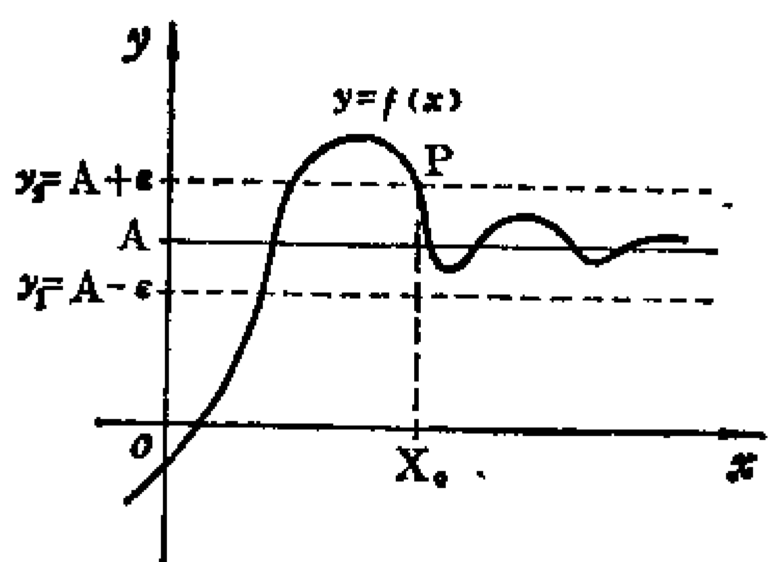


图2.4

X_0"，就是在数轴上存在一点X_0，"当 $x>X_0$ 时，有 $|f(x)-A|$

$<\varepsilon$”，就是在 X_0 右侧，函数 $f(x)$ 的图象位于这个带形区域之内（如图2.4）。

下面给出当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限定义。

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上有定义，且存在实数 A. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $X_0\in R$，当 $x<-X_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时**存在极限（或收敛），且极限为** A（**或收敛于** A），记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to-\infty).$$

最后给出当 $x\to\infty$ 时，（即 $|x|\to+\infty$），函数 $f(x)$ 的极限定义。

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $\{x \mid |x|>a\}=(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义，且存在实数 A. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $X_0\in R$，当 $|x|>X_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时**存在极限（或收敛），且极限为** A（**或收敛于** A），**记作**

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to\infty).$$

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

解得 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $X_0=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X_0=\dfrac{1}{\varepsilon}\in R$，当 $|x|>X_0$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x<\varepsilon,$$

即 $$\operatorname{arctg}x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

对不等式两边取正切值，再根据 $\operatorname{tg}x$ 的单调性，有$x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，取$X_0=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(\text{当 }\varepsilon<\frac{\pi}{2}\text{时}, X_0>0\right)$.

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数$X_0=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\in R$，当 $x>X_0$ 时，有 $\left|\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2\,|2x-1|}<\frac{4}{2\,|2x-1|}$$

$$=\frac{2}{|2x-1|}<\frac{2}{2\,|x|-1}<\varepsilon,$$

解得 $$|x|>\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)，\text{取}X_0=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)>0.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数$X_0=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\in R$，当$|x|>X_0$时，有 $\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

然而，对例 3 中的不等式

$$\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{2}{2\,|x|-1}$$

可采用“限定变量”的方法使之继续放大，当 $|x|>1$ 时（这

是可行的，因为自变量 $|x|\to+\infty$)，即 $|x|-1>0$，则有

$$\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{2}{2|x|-1}=\frac{2}{|x|+(|x|-1)}$$

$$<\frac{2}{|x|}<\varepsilon,$$

由此解得 $|x|>\frac{2}{\varepsilon}$，取 $X_0=\max\left\{1,\frac{2}{\varepsilon}\right\}>0$。

于是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X_0=\max\left\{1,\frac{2}{\varepsilon}\right\}\in R$，

当 $|x|>X_0$时，有 $\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^2+x-5}{3x^2-2x-1}=\frac{7}{3}$。

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，有不等式($x<-\frac{1}{3}$)

$$\left|\frac{7x^2+x-5}{3x^2-2x-1}-\frac{7}{3}\right|=\frac{8-17x}{3(3x^2-2x-1)}$$

$$<\frac{18(1-x)}{-3(1-x)(3x+1)}$$

$$=\frac{6}{-3x-1},$$

由于$x\to-\infty$，所以可以限定$x<-1$，有

$$\left|\frac{7x^2+x-5}{3x^2-2x-1}-\frac{7}{3}\right|<\frac{6}{-3x-1}=\frac{6}{-2x+(-x-1)}$$

$$<\frac{6}{-2x}=\frac{3}{-x}<\varepsilon,$$

从而解得 $x<-\frac{3}{\varepsilon}$，取$X_0=max\{|-1|,\ \frac{3}{\varepsilon}\}>0$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X_0\in R$，当 $x<-X_0$

X_0时，有

$$\left|\frac{7x^2+x-5}{3x^2-2x-1}-\frac{7}{3}\right|<\varepsilon.$$

二　当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

在区间〔0，2〕上，求抛物线 $y=2x^3$ 过点 $P(1,2)$ 的切线斜率 k。

怎样求切线斜率k呢？在抛物线 $y=2x^3$ 点 P 的附近，任取一点 $Q(x,y)$。由解析几何知，其割线PQ的斜率 k'是

$$k'=\frac{y-2}{x-1}=\frac{2x^3-2}{x-1}.$$

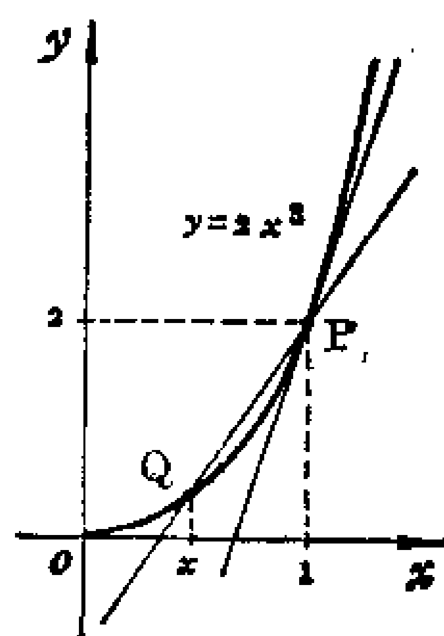


图2.5

如图2.5示，因 Q 不同于P，即 $x\neq1$，所以有

$$k'=\frac{2x^3-2}{x-1}$$

$$=\frac{2(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=2(x^2+x+1),$$

当点 Q 沿着抛物线 $y=2x^3$ 无限地趋近于点P时，割线 PQ的斜率 k' 就无限地趋近于点P的切线斜率 k。也就是说，当 x 无限地趋近于1时，$k'=2(x^2+x+1)$ 就无限地趋近于6，即切线斜率 k 为6。

现在进一步地做定量的刻划。

当 $\varepsilon=\frac{1}{10}$时，要想做到 $\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|<\frac{1}{10}$，即

$$\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|=|2(x+2)(x-1)|\leqslant8\ |x-1|<\frac{1}{10}$$

(因为 $0\leqslant x\leqslant 2$)，只须 $0<|x-1|<\frac{1}{80}$即可.

当 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$时，要想做到 $\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|<\frac{1}{1000}$，

即

$$\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|\leqslant 8\ |x-1|<\frac{1}{1000},$$

只须 $0<|x-1|<\frac{1}{8000}$即可.

对任意给定的$\varepsilon>0$，要想做到$\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|<\varepsilon$，即

$$\left|\frac{2x^3-2}{x-1}-6\right|\leqslant 8\ |x-1|<\varepsilon,$$

只须 $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{8}$即可. 这就是所谓当 $x\to 1$ 时，$\frac{2x^3-2}{x-1}$以6为“极限”.

下面给出，当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限定义：

定义 设函数$f(x)$在点 a 的某个去心邻域① 内有定义，且存在数A. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时**存在极限（或收敛）**，且极限为A（或收敛于A），记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a).$$

因此，上面讨论的抛物线 $y=2x^3$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率 k 为：

---

① 去心邻域：就是点 a 的某个邻域，但是不包含点a，记作 $U^{\circ}(a,\delta)$. 它与$\{x\ |0<|x-a|<\delta\}$ 是等价的.

$$k = \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = 6.$$

由于不等式

$$0 < |x - a| < \delta \text{ 与 } a - \delta < x < a + \delta \text{（但 } x \neq a\text{）}$$

是等价的．不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ 与 } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

是等价的．不难对极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 予以几何说明．

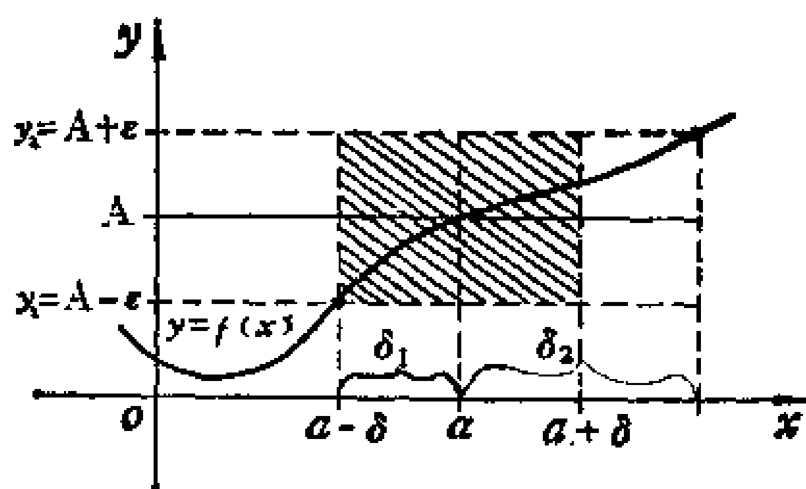


图2.6

"对任意给定的 $\varepsilon > 0$"，就是有以直线 $y = A$ 为中心，以直线 $y_1 = A - \varepsilon$，$y_2 = A + \varepsilon$ 为边界，其宽度为2ε的带形区域．由于ε的任意性，故知其带形区域的宽度2ε也是任意的．"总存在 $\delta > 0$"，就是总存在半径 δ．"当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$"，就是在以 a 为心以 δ 为半径的去心邻域 $(a - \delta, a + \delta)$ $(x \neq a)$ 内的函数$f(x)$ 的图象位于这个带形区域之内（如图 2.6）．

为了更好地掌握$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$ 的叙述，现列表对比如下：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$
对任意给定的 $\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在（某个）$\delta>0$	对任意的 $\delta>0$
当 $0<\|x-a\|<\delta$ 时	存在某个x_0，当 $0<\|x_0-a\|<\delta$ 时
有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	有 $\|f(x_0)-A\|\geqslant\varepsilon_0$

例 5 证明$\lim\limits_{x\to 2}(5x-2)=8$。

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|(5x-2)-8|=|5(x-2)|=5|x-2|<\varepsilon.$$

解得 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|(5x-2)-8|<\varepsilon$。

例 6 证明（1）$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$；

（2）$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$。

证明（1）对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|x-a|}{2}\text{①}=|x-a|<\varepsilon.$$

解得 $|x-a|<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon>0$。于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|\sin x-\sin a|<\varepsilon.$$

① 当$x\neq a$时，有 $\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<\frac{|x-a|}{2}$。

特别地，当 $a=0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

（2）对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不式

$$|\cos x-\cos a|=\left|-2\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|<\varepsilon.$$

解得 $|x-a|<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon>0$. 于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|\cos x-\cos a|<\varepsilon.$$

特别地，当 $a=0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$.

例 7 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|$$

$$=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

解得 $|x-a|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon$，故取 $\delta=\sqrt{a}\cdot\varepsilon>0$. 于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\sqrt{a}\cdot\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon.$$

例 8 证明 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=-\frac{1}{6}$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，有等式

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|=\left|\frac{x+3}{x^2-9}+\frac{1}{6}\right|$$

$$=\left|\frac{x^2+6x+9}{6(x+3)(x-3)}\right|=\frac{|x-(-3)|}{6|x-3|},$$

由于等式的右端分子和分母中都含有变量 x，故采取"限定变量"法，来加强不等式. 因为 $x\to -3$，所以可限定

$x\in(-4,-2)$，即 $-4<x<-2$. 则有

$$-4-3<x-3<-2-3.$$

或 $\quad 5<|x-3|<7.$

故有 $\quad \left|\frac{x+3}{x^2-9}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|=\frac{|x-(-3)|}{6|x-3|}<\frac{|x+3|}{6\cdot 5}<\varepsilon.$

解得 $|x+3|<30\cdot\varepsilon$，取 $\delta=\min\{1,30\cdot\varepsilon\}>0$.

于是，对任意给当的 $\varepsilon>0$，存在$\delta=\min\{1,30\cdot\varepsilon\}$，当 $0<|x-(-3)|=|x+3|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|<\varepsilon.$$

三　单侧极限

由于有些函数在某些点的左侧与右侧的解析表达式不同，或函数仅在其某一侧有定义，讨论函数在这些点上的极限问题就存在所谓的单侧极限. 如，讨论符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的极限，就必须以 $x>0$ 或 $x<0$ 的两侧分别讨论函数的极限. 又如，讨论函数

$$y=\sqrt{x}, \quad x\geqslant 0$$

在 $x=0$ 处的极限，就必须从 $x>0$ 一侧讨论函数的极限.

现在定义单侧极限.

定义　设函数 $f(x)$ 在区间$(a-r,a)$（其中 $r>0$）上有定义，且存在数A. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<a-x<\delta$ $(\delta<r)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a 存在左极限，且极限为A，记作

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(a-0)=A.$$

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+r)$（其中 $r>0$）上有定义，且存在数 A. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<x-a<\delta(\delta<r)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a **存在右极限，且极限为** A，记作

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A \quad 或 \quad f(a+0)=A.$$

我们把函数 $f(x)$ 在点 a 的左、右极限称为**单侧（边）极限**，而把函数 $f(x)$ 在点 a 的极限称为**双侧（边）极限**.

定理2.11 函数 $f(x)$ 在点 a 双侧极限存在的充要条件是：$f(x)$在点 a 的两个单侧极限存在且相等.

证明 **必要性** 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，由极限的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 因为不等式

$$0<|x-a|<\delta \text{ 与 } a-\delta<x<a+\delta \text{（且 } x\neq a\text{）},$$

等价，有 $a-\delta<x<a$（或 $0<a-x<\delta$），

$$a<x<a+\delta \text{（或 } 0<x-a<\delta\text{）}.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当 $0<a-x<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$.

总之有 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$.

充分性 已知 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$，由左、右极限的定义，有

对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，当$0<a-x<\delta_1$（或 $a-\delta_1<x<a$）时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当$0<x-a<\delta_2$（或$a<x<a+\delta_2$）时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$。 □

例 9 证明符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处不存在极限。

证明 由于

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}x=\lim_{x\to 0+0}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}x=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

根据定理2.11，故知符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处不存在极限。

例10 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，证明 $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1$。

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，解不等式

$$|f(x)-0|=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon,$$

或

$$e^{\frac{1}{x}}>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

两边取自然对数，得

$$\frac{1}{x}>\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \quad 或 \quad x<\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)},$$

取 $\delta=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}>0$。

于是，对任意给定的$\varepsilon>0\left(\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，存在 $\delta=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}>0$，当 $0<x<\delta$ 时，有 $|f(x)-0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=0.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|f(x)-1|=\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-1\right|=1-\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon,$$

或 $$e^{\frac{1}{x}}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

两边取自然对数，得

$$\frac{1}{x}<\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\left(当\ \varepsilon<\frac{1}{2}时，\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<0\right),$$

或 $$\frac{1}{\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}<x<0,$$

取 $\delta=-\dfrac{1}{\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}>0.$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0\left(\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，存在 $\delta=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}>0$，当$-\delta<x<0$ 时，有 $|f(x)-1|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=1.$$

§ 2.5 函数极限的性质及四则运算

在§2.4中，我们共讨论了两类六种形式的函数极限：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to\infty}f(x);$$

$$\lim_{x\to a+0}f(x),\ \lim_{x\to a-0}f(x),\ \lim_{x\to a}f(x).$$

它们与收敛数列有完全类似的性质和运算法则。本节仅就$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 的形式进行讨论，其它形式留给读者作为练习。

定理2.12（局部有界性） 如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则存在某个去心邻域 $U^{\circ}(a,\delta)$，使得$f(x)$ 在 $U^{\circ}(a,\delta)$ 内有界。

证明 已知$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，由极限定义，对某个$\varepsilon_0>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in U^0(a,\delta)$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon_0$

另外，由于

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|$$
$$<\varepsilon_0+|A|,$$

取 $M=\varepsilon_0+|A|$，对任意的 $x\in U^0(a,\delta)$ 有 $|f(x)|<M$。□

定理2.13（局部保号性） 如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，且 $A>0$（或$A<0$），则存在某个去心邻域 $U^0(a,\delta)$对任意的$x\in U^0(a,\delta)$，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

证明 已知$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，且$A>0$，由极限定义，对某个$\varepsilon_0=\frac{A}{2}$，存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in U^0(a,\delta)$，有 $|f(x)-A|<\frac{A}{2}$。

由于不等式

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2} \text{ 与 } -\frac{A}{2}<f(x)-A<\frac{A}{2}$$

等价，因此得到

$$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$ □

对于$A<0$ 的情形留给读者作为练习。

推论（不等式性质） 如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，且存在某个去心邻域 $U^0(a,\delta)$，对任意的 $x\in U^0(a,\delta)$，有 $f(x)>0$（或（$f(x)<0$），则$A\geqslant0$ （或$A\leqslant0$）。

证明 用反证法．假设 $A<0$，则根据定理2.13，必存在某个去心邻域 $U^0(a,\delta_1)$，且使 $\delta_1<\delta$，对任意的$x\in U^0(a,\delta_1)$，有 $f(x)<0$，与已知条件 $f(x)>0$ 矛盾。□

对于$A\leqslant0$ 的情形，留给读者作为练习。

定理2.14 （唯一性） 如果函数 $f(x)$在点 a 存在极限，则极限必唯一。

证明 假设函数 $f(x)$ 在点 a 存在两个极限 A 和 B，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$. 由极限的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-B|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，同时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{和} \quad |f(x)-B|<\varepsilon.$$

于是，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|A-B| &= |A-f(x)+f(x)-B|\\ &\leqslant |f(x)-A| + |f(x)-B| <\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 2ε 的任意性，故 $A=B$. 极限唯一. □

定理2.15 **（极限的四则运算）** 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 皆存在极限，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，和 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0)$ 在点 a 皆存在极限，且有

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

下面仅就乘积的形式予以证明，其它两种形式留给读者作为练习.

证明 因为函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限，根据定理2.12，存在 $M>0$，$\delta_1>0$，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

存在 $\delta_3>0$，当 $0<|x-a|<\delta_3$ 时，有 $|g(x)-B|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，同时有

$$|f(x)|\leqslant M,\quad |f(x)-A|<\varepsilon \text{ 和 } |g(x)-B|<\varepsilon.$$

于是，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &=|f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB|\\ &\leqslant |f(x)|\cdot|g(x)-B|+|B|\cdot|f(x)-A|<M\varepsilon\\ &\quad+|B|\varepsilon=(M+|B|)\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)g(x)$ 在点 a 有极限存在，且有

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=AB=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x). \qquad \square$$

定理2.15表明：

（1）代数和的极限等于极限之代数和；积的极限等于极限之积；商的极限等于极限之商（但分母极限不为零）。

（2）和与积皆可推广到 n 个函数的情形。

例1 如果 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$.

证明 若 $f(x)\equiv c$（常数），则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

事实上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，任取 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

若 $f(x)=x$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

事实上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

再应用定理2.15，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} p(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\ &=a_0\lim_{x\to x_0}x^n+a_1\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}a_n\end{aligned}$$

$$= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n$$

$$= p(x_0).$$

例 1 表明：任何一个多项式在任意点的极限等于该点的函数值．例如

$$\lim_{x\to 2}(5x^3+3x^2-4x-1) = 5\cdot 2^3+3\cdot 2^2-4\cdot 2-1=43.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{Q(x)}$，其中 $p(x)$，$Q(x)$ 是关于 x 的任意多项式，且 $Q(x_0)\neq 0$.

解 根据定理2.15及例 1，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{p(x_0)}{Q(x_0)}.$$

例 2 表明：任意有理函数在分母不为零的点存在极限，其极限值就是该有理函数在该点的函数值．例如

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{4x^3+x^2-x+3} = \frac{3\cdot 1^2+1-1}{4\cdot 1^3+1^2-1+3} = \frac{3}{7}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2-x+2}$.

解 因为当 $x\to 2$ 时，分子的极限是 0，分母的极限也是 0，所以不能直接应用定理2.15．这时必须消去分子和分母中当$x=2$时使之分子、分母为 0 的因子，然后再求极限，即

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-2x^2-x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{2+2}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

解 因为当$x\to -1$时，分式的分子和分母的极限都为 0，所以不能直接应用定理2.15．根据该分式的特点，利用分子和分母同乘 $(\sqrt{2x+3}+1)$消去 $(x+1)$ 的因子，再求其极限，

即

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)}{(\sqrt{2x+3}-1)(\sqrt{2x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)}{2(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}+1}{2}.$$

令 $y=2x+3$，当 $x\to-1$ 时，$y\to1$，再利用§2.4中的例7，则得

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}+1}{2}=\lim_{y\to1}\frac{\sqrt{y}+1}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

故 $$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}-1}=1.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$，其中 n 为自然数。

解 因为当 $x\to0$ 时，分式的分子和分母的极限都为0，所以不能直接应用定理2.15。利用二项式定理将 $(1+x)^n$ 展开，消去 x 的因子，再求极限，即

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots+x^n}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(n+\frac{n(n-1)}{2}x+\cdots+x^{n-1}\right)=n.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$（$m$，$n$ 都是正整数）。

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}$$

$$=\frac{1+1+\cdots+1(m\text{ 项})}{1+1+\cdots+1(n\text{ 项})}$$

$$=\frac{m}{n}.$$

§ 2.6 函数极限存在判别法

与数列情形类似，这里我们讨论函数极限存在判别法。这些判别法在理论上和应用上都很重要。

一 两个判别法

定理2.16（两边夹） 如果$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$，且存在某个去心邻域 $U^\circ(a,\delta_0)$，对任意的 $x\in U^\circ(a,\delta_0)$，有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$$

则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

证明 已知$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$，根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，分别有

存在 $\delta_1>0$，对任意的 $x\in U^\circ(a,\delta_1)$，有 $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$，或有 $A-\varepsilon<\varphi(x)$.

存在 $\delta_2>0$，对任意的 $x\in U^\circ(a,\delta_2)$，有 $|\psi(x)-A|<\varepsilon$，或有 $\psi(x)<A+\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$，对任意的 $x\in U^\circ(a,\delta)$，同时有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)\ ,\ A-\varepsilon<\varphi(x)\text{与}\psi(x)<A+\varepsilon,$$

于是有

$$A-\varepsilon<\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)<A+\varepsilon,$$

或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 故有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. □

定理2.17 如果函数 $f(x)$ 在 $[\alpha, a)$上单调，且有界，即存在$M>0$，对任意的 $x\in[\alpha, a)$ 有$|f(x)|\leqslant M$，则当$x\to a-0$ 时，函数 $f(x)$ 存在极限.

证明 不妨假设$f(x)$ 在 $[\alpha, a)$ 上是递增的，且有上界，即数集$\{f(x)|x\in[\alpha, a)\}$有上界。根据确界定理知，数集$\{f(x)|x\in[\alpha, a)\}$必存在唯一的上确界$A=\sup\{f(x)|x\in[\alpha, a)\}$。现证明$A$ 就是函数 $f(x)$ 的极限，即$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$.

由上确界的定义知，（1）$f(x)\leqslant A$；（2）对任意给定的 $\varepsilon>0$，至少存在一个$x_0\in[\alpha, a)$，在数集$\{f(x)|x\in[\alpha, a)\}$中有 $f(x_0)>A-\varepsilon$。又因为函数 $f(x)$ 是递增的，取$\delta=a-x_0$，当$a-\delta<x<a$时，有 $f(x)\geqslant f(x_0)$。于是，当$a-\delta<x<a$时，有

$$A-\varepsilon<f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant A<A+\varepsilon,$$

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

根据函数极限的定义，故知$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$. □

完全类似，如果函数 $f(x)$ 在 $[\alpha, a)$上是递减且有下界，则$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$.

二 两个重要极限

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

作单位圆（如图2.7），且$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$OA\perp AC$。显然有

$\triangle AOB$ 的面积<扇形AOB的面积<$\triangle AOC$ 的面积，

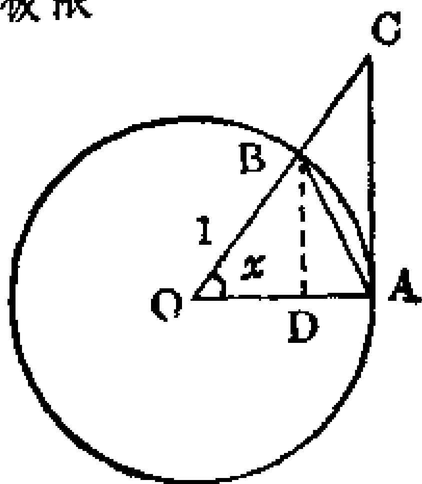


图2.7

即 $$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{tg}x.$$

用$\frac{1}{2}\sin x>0$ 除不等式，得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$（见§2.4例6），根据定理2.16有

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x<0$ 时，令 $x=-y$，则有

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to 0+0}\frac{\sin(-y)}{-y}=\lim_{y\to 0+0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

根据定理2.11，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}\ (n\neq 0)$.

解 因为

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{\sin mx}{mx}\cdot\frac{mx}{nx}\cdot\frac{1}{\frac{\sin nx}{nx}}=\frac{m}{n}\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}},$$

对于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}$，令 $mx=t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1;$$

同样可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}=1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\dfrac{\sin mx}{mx}}{\dfrac{\sin nx}{nx}}\right)$$

$$=\frac{m}{n}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{mx}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{nx}}=\frac{m}{n}.$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}=3.$$

2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

当 $x\to+\infty$ 时，对任意的 $x\geqslant 1$，存在两个相邻的自然数 n 与 $n+1$，使

$$n\leqslant x<n+1,$$

或
$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n},$$

有 $$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

和 $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因为 $n\leqslant x<n+1$，所以当 $x\to+\infty$时，也有 $n\to\infty$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=e\cdot 1=e.$$

根据定理2.16有：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

当 $x\to-\infty$时，令 $y=-x$，$x\to-\infty$，有 $y\to+\infty$，于是有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right]$$

$$=e.$$

故得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

如设 $\alpha=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$时，有 $\alpha\to 0$，于是得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $x=-y$，则当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{e}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$，其中$m$ 为自然数。

解 令 $mx=y$，当 $x\to 0$ 时，有 $y\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+mx)^{\frac{1}{mx}}]^m$$

$$=[\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{mx}}]^m$$

$$=[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]^m$$

$$=e^m.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right.$$

$$\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\Bigg]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}$$

令 $x^2=u$，$-x^2=v$，当 $x\to\infty$时，$u\to+\infty$，$v\to-\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\cdot\lim_{v\to-\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v$$

$$=e\cdot e=e^2.$$

三　柯西收敛准则

定理2.18（柯西收敛准则）　函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 x' 与 x''，当 $0<|x'-a|<\delta$ 与 $0<|x''-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

证明　必要性　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，由极限的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

当然，对任意的 x' 与 x''，当 $0<|x'-a|<\delta$与$0<|x''-a|<\delta$，同时有

$$|f(x')-A|<\varepsilon,\quad |f(x'')-A|<\varepsilon.$$

于是

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<2\varepsilon.$$

定理的充分性留到第七章证明。

为了更好地掌握和运用柯西收敛准则，现将正、否叙述列表对比如下：

$f(x)$ 在点 a 存在极限$\Longleftrightarrow$	$f(x)$在点 a 不存在极限$\Longleftrightarrow$
任意给定的$\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在（某个）$\delta>0$	对任意的 $\delta>0$
对任意的 x' 与 x''， 当 $0<\|x'-a\|<\delta$ $0<\|x''-a\|<\delta$ 时	存在（某两个）x', x''， 当 $0<\|x''-a\|<\delta$ $0<\|x'-a\|<\delta$ 时
有 $\|f(x')-f(x'')\|<\varepsilon$	有 $\|f(x')-f(x'')\|\geqslant\varepsilon_0$

例 7 证明函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时，不存在极限。

证明 只须证明当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$不满足柯西收敛准则的条件即可。

事实上，存在某个 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，及任意的 $\delta>0$，存在 $x'=\pm\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 和 $x''=\pm\dfrac{1}{n\pi}$，只要 n 取得充分大，可使

$$0<|x'-0|=|x'|<\delta,\quad 0<|x''-0|=|x''|<\delta,$$

有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\sin\left[\pm\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]-\sin(\pm n\pi)\right|$$

$$=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

根据柯西收敛准则否定叙述，故知函数 $f(x)$ 当$x\to0$时极限不存在。其图象如图2.8示。

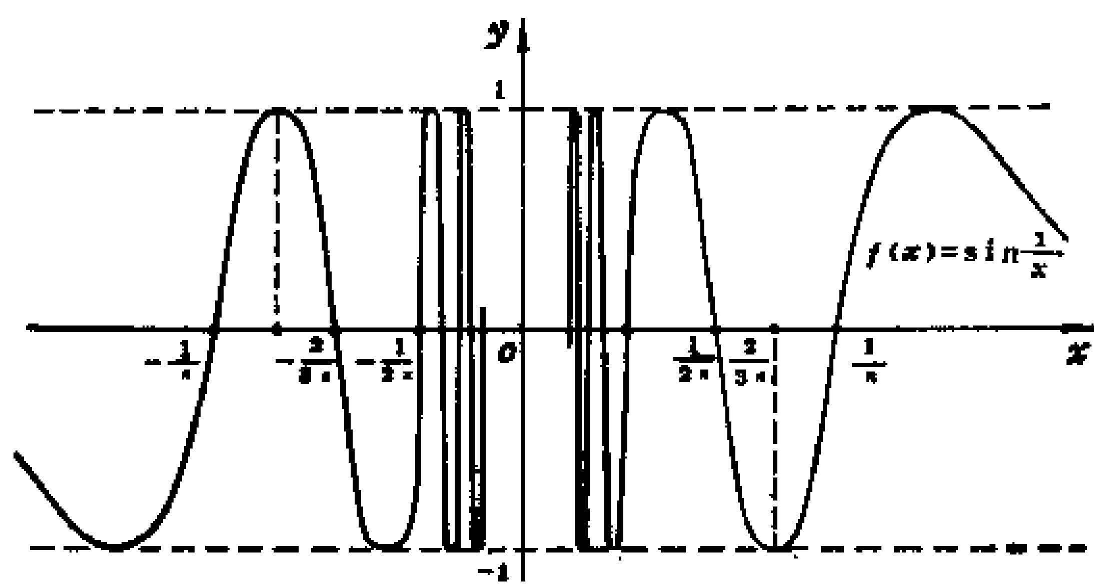


图2.8

§ 2.7 无穷小量与无穷大量

在存在极限的函数中，极限是零的函数具有特殊的意义。它在数学分析的产生与发展曾起过重要作用。在这一节里我们将讨论无穷小量、无穷大量及其阶的比较。

一 无穷小量

定义 在过程中，若函数 $f(x)$ （或数列）的极限等于零，则称函数 $f(x)$ （或数列）为无穷小量。

例如，当 $n\to\infty$时，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$ 等都是无穷小量。当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$等都是无穷小量。当 $x\to 0$ 时，x, $\sqrt{x}$, x^3, $\sin x$ 等都是无穷小量。

在函数极限中，按其自变量的变化过程，共有六种形式：$x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$; $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to a$。在以下的讨论中，我们仅就 $x\to a$ 的情形给出无穷小量的性质。读者不难将这些性质推到其余五种无穷小量上去。

$\alpha(x)$是无穷小量 $(x\to a)$，即 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$，也可用$\varepsilon-\delta$语言叙述如下：

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有$|\alpha(x)|<\varepsilon$。

定理2.19 极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的充要条件是：函数 $f(x)$可表为

$$f(x)=A+\alpha(x)\ （或\ f(x)-A=\alpha(x)），$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to a$ 时的无穷小量。

证明 **必要性** 已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，根据极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

如设 $\alpha(x)=f(x)-A$，在上述过程中，$|\alpha(x)|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$。因此，$\alpha(x)$ 是无穷小量（当 $x\to a$ 时）且有 $f(x)=A+\alpha(x)$。

充分性 已知 $f(x)=A+\alpha(x)$，且 $\alpha(x)\to 0$（当 $x\to a$ 时），根据函数极限的四则运算得

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}A+\lim_{x\to a}\alpha(x)=A+0=A。\qquad \square$$

定理2.19表明："当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于 A"，本质上就是当 $x\to a$ 时，$|f(x)-A|$（即 $f(x)$ 与 A 的距离）是无穷小。

定理2.20 如果函数 $f(x)$（当 $x\to a$时）是无穷小量，且函数 $g(x)$ 在点a的某个去心邻域内有界，则 $f(x)\cdot g(x)$（当 $x\to a$ 时）是无穷小量。

证明 因为 $g(x)$ 是有界的，即存在$M>0$，$\delta_1>0$，当$0<|x-a|<\delta_1$ 时，有 $|g(x)|\leqslant M$；又因为 $f(x)$ 是无穷小量，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-a|<\delta_2$时，有 $|f(x)|<\varepsilon$。取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，则有

$$|f(x)\cdot g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|<M\cdot\varepsilon。$$

即 当 $x\to a$ 时，$f(x)\cdot g(x)$是无穷小量． □

推论 1 常量与无穷小量之积是无穷小量．

因为常量是有界的，根据定理2.20，推论 1 成立。

推论 2 两个无穷小量之积是无穷小量．

因为无穷小量也是有界的，根据定理2.20，推论 2 成立。

应用上述推论，不难证明：$x\cdot e^{x}$，$x\cdot\cos x$，$x\cdot\sin x$，$x\cdot \mathrm{tg}x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小量．

二 无穷大量

定义 设函数 $f(x)$ 在点a 的某个去心邻域内有定义．如果对任意给定的$M>0$，总存在 $\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有

$$|f(x)|>M, \tag{1}$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）为**无穷大量**，或 $f(x)$（当$x\to a$ 时）发散到无穷大．记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ 或 } f(x)\to\infty \ (x\to a).$$

在不等式（1）中，当 $f(x)>M$时，称函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）为**正无穷大量**，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ 或 } f(x)\to+\infty \ (x\to a).$$

当 $f(x)<-M$ 时，称函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）为**负无穷大量**，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \text{ 或 } f(x)\to-\infty \ (x\to a).$$

定理2.21 设函数 $f(x)$在点a的某个去心邻域内有定义，且 $f(x)\neq 0$．如果 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量；反之，如果 $f(x)$当$x\to a$ 时为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量．

证明 已知 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小量，即对任意给定

的 $\varepsilon=\frac{1}{M}>0$（实际上$M>0$，且任意），存在$\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\frac{1}{M}. \qquad (2)$$

另外，由题设 $f(x)$ 在点 a 的某个去心邻域内有定义，且 $f(x)\neq 0$，因此$\frac{1}{|f(x)|}$有意义，将（2）式取其倒数得

$$\frac{1}{|f(x)|}>M,$$

于是，$\frac{1}{f(x)}$当 $x\to a$ 时为无穷大量。

反之，已知函数$f(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷大量，即对任意给定的$M=\frac{1}{\varepsilon}>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon} \qquad (3)$$

另外，由题设 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域内有定义，且 $f(x)\neq 0$，因此$\frac{1}{|f(x)|}$有定义，将（3）式取其倒数得

$$\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon,$$

于是，$\frac{1}{f(x)}$当 $x\to a$ 时为无穷小量。 □

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$。

证明 只须证明，函数 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$（当 $x\to 0$ 时）为无穷小量即可。当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小量，虽然$\frac{1}{x}$是无穷大量，但

是 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界量，根据定理2.20知函数 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$（当$x\to0$时）为无穷小量，即

$$\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$.

证明 对任意给定的 $M>0$，解不等式

$$\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right|>M,$$

即 $$|x-2|^2<\frac{1}{M},$$

解得 $|x-2|<\frac{1}{\sqrt{M}}$，取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}>0$.

于是，对任意给定的$M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$时，有$\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right|>M$，即

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$$

例 3 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}(-a^x)=-\infty$ $(a>1)$.

证明 对任意给定的 $M>0$，解不等式

$$-a^x<-M,$$

即 $a^x>M$，取对数得

$$x>\log_aM,$$

取 $X_0=\log_aM>0$（由于M的任意性，总可使 $\log_aM>0$）.
于是，对任意给定的 $M>0$，存在$X_0=\log_aM>0$，当$x>X_0$时，有 $-a^x<-M$，即

$$\lim_{x\to+\infty}(-a^x)=-\infty.$$

三　无穷小量阶的比较

第一段的推论2指出："两个无穷小量之积是无穷小量"。根据极限的运算定理又不难给出"两个无穷小量的代数和也是无穷小量"。然而，我们却不能断定"两个无穷小量之商仍是无穷小量"。这是因为：

在 $x\to+\infty$ 过程中，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{x^3}$ 都是无穷小量，以下三个函数都是两个无穷小量的商，即

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x},\quad \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,\quad \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}}=x.$$

显然，当 $x\to+\infty$ 时，第一个函数是无穷小量，第二个函数是常量，第三个函数是无穷大量。因此，两个无穷小量之商可能有各种不同的情况。其原因就是各无穷小量（当 $x\to+\infty$ 时）趋向于0的速度不同。现列表如下：

x	1	10	100	$\cdots\to+\infty$	x	1	10	100	$\cdots\to+\infty$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\cdots\to0$	$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\cdots\to0$
$\frac{1}{x^2}$	1	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10000}$	$\cdots\to0$	$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$	1	1	1	$\cdots\to1$
$\frac{1}{x^3}$	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\cdots\to0$	$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}}=x$	1	10	100	$\cdots\to+\infty$

变量变化速度的快与慢是相对的，是相互比较而存在的。

定义　设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 当 $x\to a$ 时皆是无穷小量，并设 $\beta(x)$ 在点 a 充分小的邻域内不为零。

（1）如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，或称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小．记作

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\quad(x\to a).$$

（2）如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$（$c\neq 0$ 常数），则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$是同阶无穷小，记作

$$\alpha(x)=O(\beta(x))\quad(x\to a).$$

（3）如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\quad(x\to a).$$

（4）当 $x\to 0$ 时，如果把 x 看作标准无穷小 $(x\to 0)$，且函数 $\alpha(x)$ 与 $x^k(k>0)$ 是同阶无穷小 $(x\to 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是关于 x 的 k 阶无穷小，记作

$$\alpha(x)=O(x^k)\quad(x\to 0).$$

例如，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\dfrac{1}{x^2}$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的高阶无穷小，即 $\dfrac{1}{x^2}=o\left(\dfrac{1}{x}\right)\ (x\to+\infty)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $1-\cos x$ 与 x^2是同阶无穷小．或称 $1-\cos x$ 是关于 x 的2阶无穷小．即 $1-\cos x=O(x^2)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x$.

定理2.22 设 $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to a)$，$z(x)$是另一个函数，如果 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)z(x)=c$，则$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)z(x)=c$.

证明 因为

$$\beta(x)z(x)=\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)z(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，所以有

$$\lim_{x\to a}\beta(x)z(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)z(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to a}\alpha(x)z(x)$$

$$=1\cdot c=c. \qquad \Box$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\operatorname{tg}bx}$.

解 当 $x\to 0$ 时，因为 $\sin ax\sim ax$，$\operatorname{tg}bx\sim bx$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{tg}bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$.

解 因为

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{\operatorname{tg}x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$=\frac{2\sin x}{\operatorname{tg}x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})},$$

和 $\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$（当 $x\to 0$ 时），所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\operatorname{tg}x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\text{sim}x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$=1$（此处使用了§2.5中例 4 的方法）.

§ 2.8 函数极限与数列极限的关系

至此，数列极限理论和函数极限理论都是相互独立的，然而，它们之间又是相互联系着的．这不仅表现在数列是定义在自然数集 N 上的函数，并且函数极限又可以归结为数列极限．下面的定理就给出这种关系．

定理2.23(海涅极限定理)① $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的充要条件是：在函数 $f(x)$ 的定义域内，对任意的以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq a,\ n=1,2,\cdots)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$.

证明 必要性 已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，即对 $\delta>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $0<|a_n-a|<\delta$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时（当然有 $0<|a_n-a|<\delta$），有 $|f(a_n)-A|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=A.$$

充分性 已知对任意的 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$，且 $a_n\neq a$，$f(a_n)\to A$ $(n\to\infty)$，往证 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

用反证法．假设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$，即存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意

①海涅：Heine, H. E. 德国数学家，1821—1881.

的$\delta>0$，存在某个 x_0，当 $0<|x_0-a|<\delta$ 时，有 $|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 于是有

取 $\delta=1$，存在a'_1，当 $0<|a'_1-a|<1$ 时，有 $|f(a'_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

取 $\delta=\frac{1}{2}$，存在 a'_2，当$0<|a'_2-a|<\frac{1}{2}$时，有 $|f(a'_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……………………………

取 $\delta=\frac{1}{n}$，存在a'_n，当 $0<|a'_n-a|<\frac{1}{n}$时，有 $|f(a'_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……………………………

由 $\delta\to0$（当$n\to\infty$时），知$\lim\limits_{n\to\infty}a'_n=a$，且$a'_n\neq a$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(a'_n)\neq A$，与已知条件矛盾。 □

推论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件是：数列 $\{x_n\}$ 的任意一个子数列都收敛，且极限都等于 a。

可见，定理2.10仅仅是它的必要性。

定理2.23表明：（1）海涅极限定理是沟通函数极限与数列极限之间桥梁，借助于它，可把函数 $f(x)$ 在点 a 的极限用数列极限表述出来。函数极限的各种定理、运算法则和收敛判别法都可以利用数列极限的相应定理予以证明。因此有时把海涅极限定理叫做归结原则。

例1 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$（$B\neq0$），则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$.

证明 因为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，根据海涅极限定理的必要性，对任意的数列 $\{a_n\}$，且 $a_n\to a$（$n\to\infty$），$a_n\neq a$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)=B$。再应用定理2.6，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)}=\frac{A}{B}.$$

再根据海涅极限定理的充分性，所以有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{A}{B}.$$

（2）利用海涅极限定理的必要性，判别某些函数不存在极限是很方便的。为此，给出两个与海涅极限定理等价的命题：

如果存在某个数列 $\{a_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a_n\neq a$ $(n=1,2,\cdots)$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ 不存在时，则 $f(x)$ 在点 a 不存在极限。

如果存在两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，$a_n\neq a$，$b_n\neq a(n=1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=B$，且 $A\neq B$，则 $f(x)$ 在点 a 不存在极限

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在。

证明　取数列

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{(2n+1)\pi}\right\},\quad\{b_n\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\},$$

$a_n\neq0,b_n\neq0$ $(n=1,2,\cdots)$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；而对应的函数值数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\cos(2n+1)\pi=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\cos2n\pi=1,$$

于是，根据上述命题，$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在。

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

在学习极限定义时，一定要领会好 ε 的任意性与相对固定性；ε 与 n_0，ε 与 X_0，ε 与 δ 之间的相互依赖关系；以及在给定了 ε 之后 n_0，X_0，δ 不是唯一的。

通过应用极限定义证明极限等式的问题，将进一步地理解极限概念的实质。在证明中，一定要掌握好证明的方法与步骤，尤其是通过"放大"和"限定"变量的方法来加强不等式，使之更容易求得 n_0（或 X_0，δ）。

掌握极限（数列与函数）的性质及其证明方法，要正确使用极限的运算法则。

能够使用极限的定义，柯西收敛准则，两个收敛判别法，如海涅极限定理等判别极限的敛散性。

根据极限的运算法则，两个重要极限，两个判别法和海涅极限定理较熟练地计算极限。

掌握好无穷小量和无穷大量的概念，以及无穷小量阶的比较。

2 求极限的常用方法

（1）约简分式法：

在求分式极限的过程中，如出现$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，将采用约简分式的方法求其极限。

见§2.2的例2，例3和§2.5的例3，例6。

（2）有理化分子或分母法：

见§2.2的例6和§2.5例4。

（3）利用两个重要极限法：

见§2.6的例1至例6。

（4）利用自然数求和公式法：

见§2.2的例5。

（5）利用公式$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

见§2.2的例4。

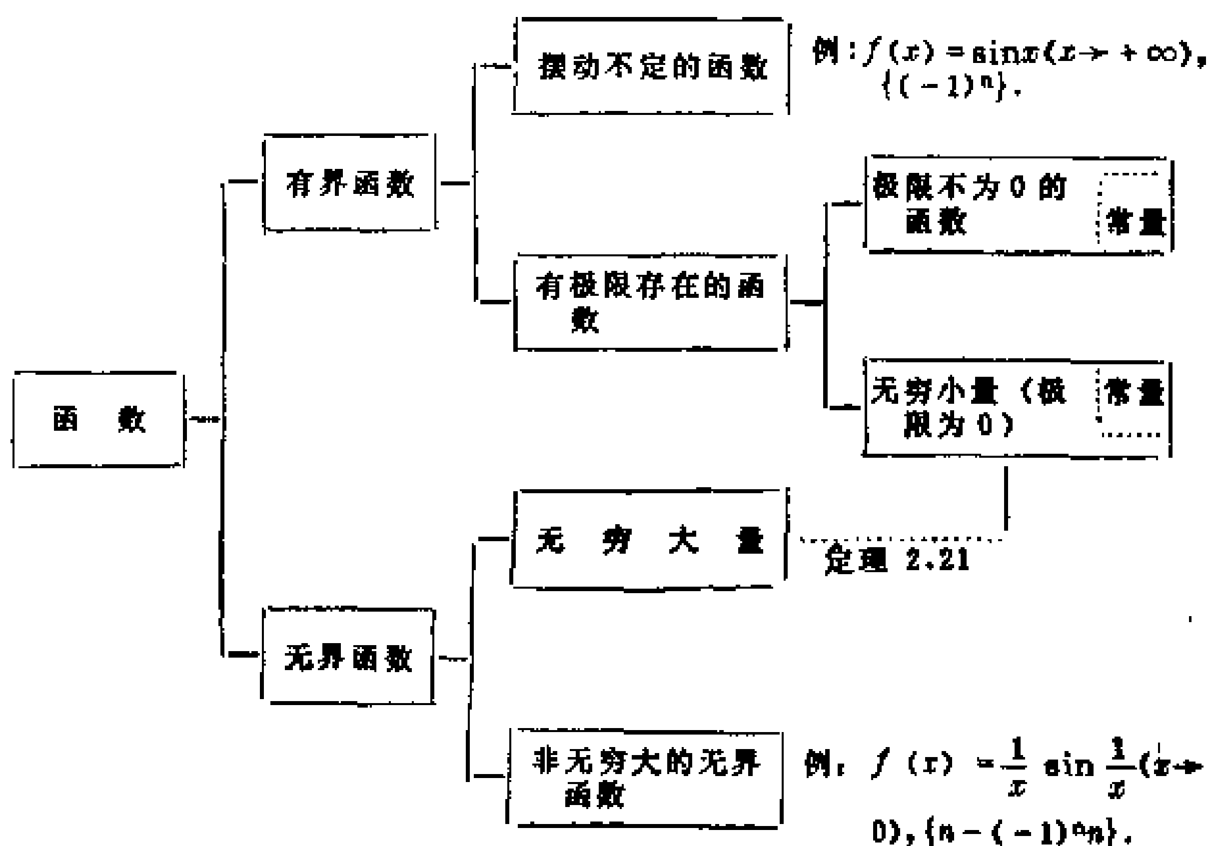
（6）利用两边夹定理和单调有界定理：

见§2.3的例4，例5，例8，例9。

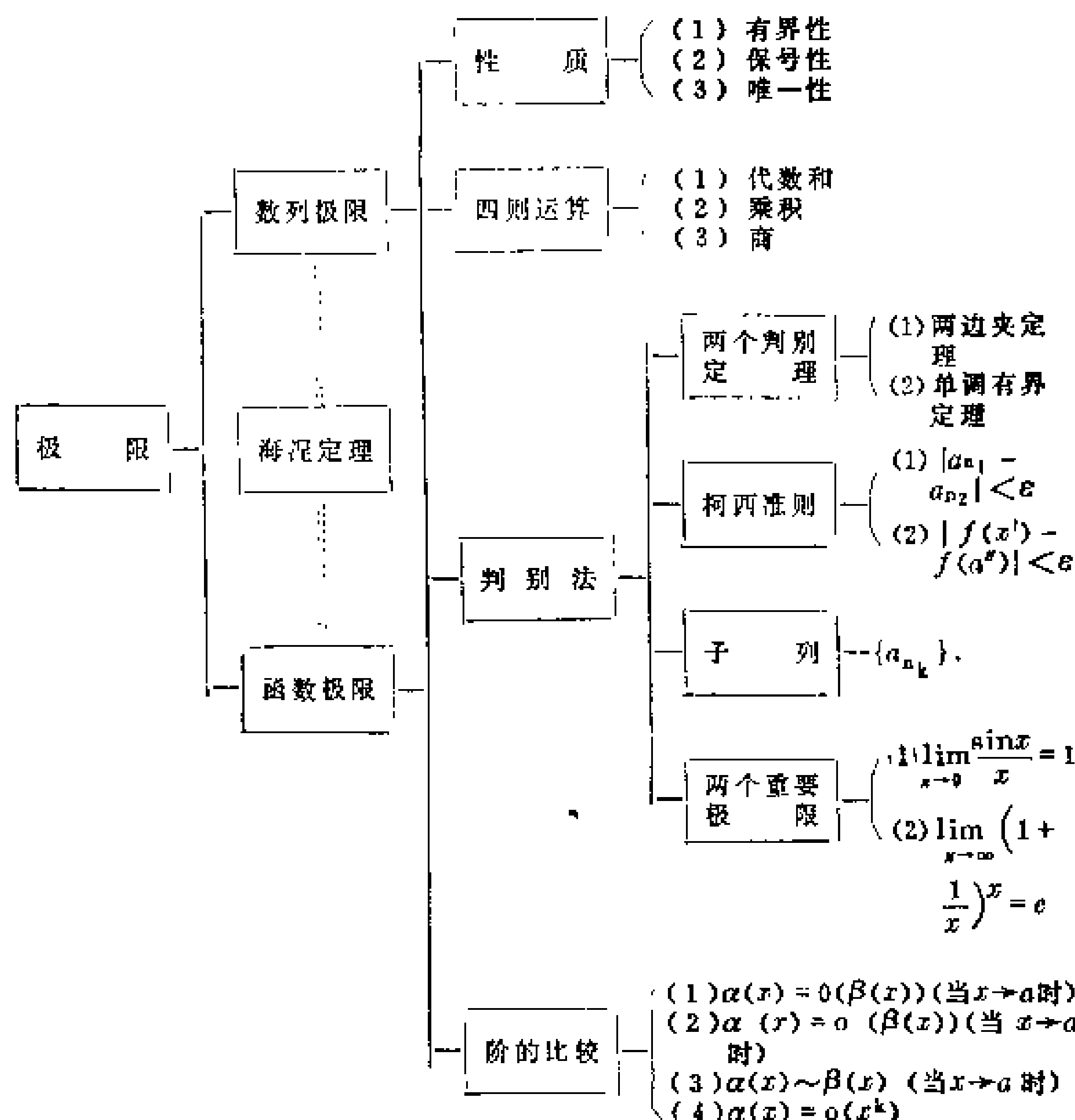
（7）利用等价无穷小代换法：

见§2.7的例4。

3 各种类型的函数



4 本章的结构



二　几点说明

1　再说用极限定义证明极限等式

在§2.1的第五段里，虽然指出证明极限等式的步骤及具体证法，可是，由于用极限定义证明极限等式不仅是十分重要的，而且对初学者来说也是比较难掌握的，为此，有必要进一步地说明如下：

（1）对初学者来说，自然地会提出这样的问题：既然已经知道了函数的极限，那么为什么还要去证明呢？因为通过证明极限等式能更好地理解与掌握极限概念。所谓证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（或

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$）就是看它是否符合极限定义的要求．即对任意给定的 $\varepsilon>0$，看使 $|a_n-a|<\varepsilon$（或 $|f(x)-A|<\varepsilon$，$|f(x)-B|<\varepsilon$）成立的那样的 n_0（或 X_0，δ）是否存在。因此这种证明就是用极限定义去检验极限是 a。

（2）怎样去证明呢？即证明的步骤：对任意给定的 $\varepsilon>0$，建立不等式；解不等式找出 n_0（或 X_0,δ）；对任意给定的 $\varepsilon>0$，和找出的 n_0（或 X_0,δ）利用极限定义再复述一遍。其中解不等式找 n_0（或 X_0,δ））是最主要的步骤。

（3）利用加强不等式法（即放大法）的依据和遵循的原则是什么？

加强不等式的依据是：加强后的不等式的解必然是加强前的不等式的解和 n_0（或 X_0,δ）的不唯一。

例如，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}=\dfrac{4}{3}$。

在证明中，对任意给定的 $\varepsilon>0$，可从不等式

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{3(3n^2+2)}<\varepsilon$$

中解得 $n>\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}-6}$，故取 $n_1=\left[\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}-6}\right]$。

如果用放大法，则可从不等式

$$\frac{5}{3(3n^2+2)}<\frac{5}{9n^2}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad （限定 n>1）$$

中解得 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取 $n_2=\max\left\{1,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$。

在加强不等式的过程中，所遵循的原则是：必须保留 $\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$、$\dfrac{1}{|x|}(x\to\infty)$ 和 $|x-a|$ $(x\to a)$ 的无穷小因子。例如，在上面的不等式

$$\frac{5}{3(3n^2+2)}<\frac{5}{9n^2}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad (n\to\infty，限定 n>1)$$

中必须保留$\frac{1}{n}$；在§2.4例3的不等式

$$\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2|2x-1|}<\frac{2}{2|x|-1}$$

$$<\frac{2}{|x|+(|x|-1)}<\frac{2}{|x|}<\varepsilon\ (x\to\infty，\text{限定}$$

$$|x|>1)$$

中必须保留$\frac{1}{|x|}$；在§2.4例8的不等式

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|=\frac{|x-(-3)|}{6|x-3|}<\frac{|x+3|}{30}<\varepsilon$$

$$(x\to-3，\text{限定}-4<x<-2)$$

中必须保留$|x+3|$ 等等。

（4）加强不等式常用的方法：

①一般放大法。象在§2.1例3中所放大的不等式

$$\left|\frac{n+2}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-1)}<\frac{12}{6n+(3n-3)}$$

$$<\frac{12}{6n}<\frac{2}{n}<\varepsilon\ (n\to\infty)；$$

在§2.4例1中所放大的不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\varepsilon\ (x\to\infty)；$$

和在§2.4例7中所放大的不等式

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|$$

$$=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon\ (x\to a)\text{等等。}$$

②限定变量放大法。上述三例都是。

③利用二项式定理放大（见本章的例题选讲）。

2　函数的有界与无界

在§1.5的第四段里，我们定义了函数的有界，这种有界是指函数 $f(x)$ 在区域 X 上有界，而在定理2.12 中给出的函数有界，是指在 $x\to a$ 的过程中函数的局部有界性，即在 a 的去心邻域上有界，因此两者是有区别的，不能混而一谈。

为了更好地了解在极限过程中函数的有界、无界、及无穷大量，现将定义对比如下：

	有界函数	无界函数	无穷大量
数列 $\{a_n\}$	存在（某个）$M>0$，对 $\{a_n\}$ 中的每一项，有 $\|a_n\|\leqslant M$	对任意的 $M>0$，n，存在某个 $n_0>n$，有 $\|a_{n_0}\|>M$。	对任意的 $M>0$，存在 n_0，对任意的 $n>n_0$，有 $\|a_n\|>M$．
函数 $(x\to a)$	$f(x)$ 在 a 的去心邻域内有定义，存在 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\|x-a\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|\leqslant M$。	$f(x)$ 在 a 的去心邻域内有定义，对任意的 $M>0$，$\delta>0$，存在 x_0，当 $0<\|x_0-a\|<\delta$ 时，有 $\|f(x_0)\|>M$．	$f(x)$ 在 a 的去心邻域内有定义，对任意的 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\|x-a\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|>M$．

3　关于极限运算与四则运算的换序

在§2.2和§2.5中，我们分别地给出了数列极限和函数极限的四则运算定理：

如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 皆收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

如果再有 $b_n\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 皆存在极限，则

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

如果再有 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq0$，则有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

上述定理表明：

（1）极限运算与四则运算可以交换次序，即先进行四则运然后求极限与先求极限然后进行四则运算都得到同样的结果。

（2）换序的条件是：数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 皆收敛，在商式中要求 $b_n \neq 0$，$\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$；函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 皆存在极限，在商式中要求 $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$。

（3）定理的作用是：可简化计算。

例如，求 $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}}$。

通常先求极限后作商，即 $\{a_n\} = \left\{1 + \frac{3}{n}\right\}$，$\{b_n\} = \left\{2 + \frac{2}{n}\right\}$ 且有 $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$，$\lim_{n \to \infty} b_n = 2 \neq 0$，于是有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\lim_{n \to \infty}\left(2 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

若不然，先作商后求极限，则须将极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}}$$

变形如下

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n + 3}{n}}{\frac{2n + 2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n + 3}{2n + 2},$$

再利用多项式除法，得：

$$\frac{n+3}{2n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}.$$

这时极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right).$$

还要借助极限定义，方可证明极限为$\frac{1}{2}$。因此，我们说极限运算与四则运算换序，可以达到简化计算的目的。

4　关于无理指数的定义

我们不止一次的提到指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq1)$，其中的自变量在实数轴上变化，当 x 是有理数时，在中学的代数里给出了定义。我们将给出当 α 为无理数时，a^α 的定义。

定理　对任意的无理数 α，如果任取一个收敛于 α 的有理数列 $\{r_n\}$，即

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\alpha,$$

则对应的指数数列 $\{a^{r_n}\}(a>0, a\neq1)$ 都收敛于同一极限。

证明思路

（1）证明任意一个收敛于α的严格递增的有理数列$\{r_n\}$，所对应的指数数列$\{a^{r_n}\}$都收敛于同一个极限A；

（2）证明，任意一个收敛于 α 的严格递减的有理数列 $\{r_n'\}$，所对应的指数数列 $\{a^{r_n'}\}$都收敛于同一个极限 B；

（3）证明：$A=B$；

（4）证明，任意一个收敛于 α 的非单调的有理数列 $\{r_n''\}$，所对应的指数数列 $\{a^{r_n''}\}$都收敛于同一极限A。

证明（1）不妨假定$a>1$。任选一个收敛于 α 的严格递增的有理数列 $\{r_n\}$，即

$$r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots,\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}r_n=\alpha,$$

由于 $a>1$，故有

$$a^{r_1}<a^{r_2}<\cdots<a^{r_n}<\cdots,$$

及对任意的 n，有

$$a^{r_n}<a^{r_0}\quad(n=1,2,\cdots)$$

其中的 r_0 是大于 α 的任一有理数．于是，数列 $\{a^{r_n}\}$是严格递增的且有上界，根据定理2.8知，数列$\{a^{r_n}\}$必有极限，并设此极限为A。

现在证明，对任意一个收敛于 α 的严格递增的有理数列$\{r_n\}$，对应的指数数列 $\{a^{r_n}\}$的极限都是A．用反证法：设存在某个有理数列 $\{\overline{r_n}\}$：

$$\overline{r_1}<\overline{r_2}<\cdots<\overline{r_n}<\cdots,\ \text{且}\lim_{n\to\infty}\overline{r_n}=\alpha,$$

其对应的指数数列$\{a^{\overline{r_n}}\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\overline{r_n}}=A'\neq A$。

不妨假定$A'<A$．因为$\lim\limits_{n\to\infty}a^{r_n}=A>A'$，根据保号性定理，所以存在充分大的 n_0，使

$$a^{r_{n_0}}>A'.$$

又因为数列$\{a^{\overline{r_n}}\}$是严格递增的，所以对任意的 n 都有

$$a^{\overline{r_n}}<A'<a^{r_{n_0}}.$$

由于 $a>1$，由上面不等式，对任意的 n 都有

$$\overline{r_n}<r_{n_0},$$

从而
$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\overline{r_n}\leqslant r_{n_0}<r_{n_0+1}.\qquad(1)$$

可是数列 $\{\overline{r_n}\}$ 是严格递增且收敛于 α，即 α 是数集$\{\overline{r_n}\}$的上确界，这与不等式（1）相矛盾。

于是，$A'=A$。

对于 $0<a<1$ 的情形，可令$a=\dfrac{1}{b}$，则$b>1$，且有

$$a^{r_n}=\left(\frac{1}{b}\right)^{r_n}=\frac{1}{b^{r_n}},$$

故由$\{b^{r_n}\}$收敛推知 $\{a^{r_n}\}$ 收敛。

（2）设$\{r'_n\}$是任意收敛于 α 的严格递减的有理数列，类似可以证明对应的指数数列$\{r'_n\}$都收敛于同一个极限 B。

（3）下面证明：$A=B$。当 $a>1$ 的情形，（同理可证$0<a<1$的情形）。

因为对任意的 n 都有

$$r_n<r'_n,$$

所以对任意的 n 都有

$$a^{r_n}<a^{r'_n}.$$

两边取极限就有

$$A\leqslant B.$$

现在证明 $A<B$ 是不可能的。如果$A<B$，设$B=A+h$，且$h>0$；于是对任意的 n 都有

$$a^{r'_n}-a^{r_n}>B-A=h. \qquad (2),$$

可是

$$a^{r'_n}-a^{r_n}=a^{r_n}(a^{r'_n-r_n}-1).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty} r'_n=\alpha,$$

因此，对任意给定的自然数 m，只要 n 充分大，使其差$r'_n-r_n<\frac{1}{m}$，从而有

$$a^{r'_n}-a^{r_n}<a^{r_n}(a^{\frac{1}{m}}-1)<\frac{a-1}{m}a^{r_n}<\frac{a-1}{m}a^{r'_{n_0}},①$$

其中r'_{n_0}是数列$\{r'_n\}$，中的一项。由于 m 的任意性，可选取

$$m>\frac{a-1}{h}a^{r'_{n_0}},$$

于是又有

---

① 当$\lambda>0$时，由二项式定理有，$(1+\lambda)^m>1+m\lambda$，如令 $\lambda=a^{\frac{1}{m}}-1>0$，其中$a>1$，则得$a>1+m(a^{\frac{1}{m}}-1)$，即 $(a^{\frac{1}{m}}-1)<\frac{a-1}{m}$.

$$a^{r'_n} - a^{r_n} < \frac{a-1}{m} a^{r'_{n_0}} < h.$$

显然这个不等式与（2）矛盾，故 $A<B$ 不成立，因此，$A=B$. □

（4）根据上述证明，以及定理2.7，显然对收敛于α的任意非单调的有理数列$\{r''_n\}$来说，所对应的指数数列$\{a^{r''_n}\}$也都收敛于同一个极限。

定义 对任意的无理数 α，任取一个收敛于 α 的有理数列 $\{r_n\}$，定义

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

三 例题选讲

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$。

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{3^n}{n!}-0\right| = \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n}$$

$$<3\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1\cdots\cdot 1\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$<15\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

从而解得 $n>\frac{15}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{15}{\varepsilon}\right]$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{15}{\varepsilon}\right]>0$，当$n>n_0$时，有

$$\left|\frac{5^n}{n!}-0\right|<\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$。

基本思路 利用二项式定理来加强不等式。

证明 因为 $3^n=(1+2)^n=1^n+n\cdot1^{n-1}\cdot2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot1^{n-2}$ $\cdot2^2+\cdots+n\cdot1\cdot2^{n-1}+2^n$，且展开后的每一项都是正的，所以有 $3^n>2n(n-1)$（即保留等式右边的第三项）。

对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式$(n>1)$

$$\left|\frac{n}{3^n}-0\right|=\frac{n}{3^n}<\frac{n}{2n(n-1)}=\frac{1}{2(n-1)}<\frac{1}{n-1}<\varepsilon,$$

解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}+1$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$。

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$，当 $n>n_0$ 时，有

$$\left|\frac{n}{3^n}-0\right|<\varepsilon.$$

例3 **证明** $\lim\limits_{x\to a}\text{tg}x=\text{tg}a\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\right)$。

基本思路 利用"限定变量"法，来加强不等式。

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，及不等式

$$|\text{tg}x-\text{tg}a|=\left|\frac{\sin x\cos a-\cos x\sin a}{\cos x\cos a}\right|$$

$$=\left|\frac{\sin(x-a)}{\cos a\cos x}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{|\cos a|\ |\cos x|}$$

$$\left(\text{因 } a\neq\frac{2n-1}{2}\pi,\ \cos a\neq0\right),$$

由于$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，有不等式

$$|\cos a-\cos x|=\left|-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| < 2\frac{|x-a|}{2}$$

$$= |x-a| < \varepsilon,$$

故取 $\delta=\varepsilon$。于是，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|\cos x-\cos a|<\varepsilon$。

现令 $\varepsilon=\delta_1=\frac{1}{2}|\cos a|$，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，当然有 $|\cos x-\cos a|<\frac{1}{2}|\cos a|$，更有

$$||\cos x|-|\cos a||\leqslant|\cos x-\cos a|<\frac{1}{2}|\cos a|,$$

即
$$|\cos a|-\frac{1}{2}|\cos a|<|\cos x|<|\cos a|+\frac{1}{2}|\cos a|,$$

从而得

$$|\cos x|>\frac{1}{2}|\cos a|.$$

故有

$$|\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a|\leqslant\frac{|x-a|}{|\cos a|\ |\cos x|}<\frac{2}{\cos^2 a}|x-a|<\varepsilon,$$

解得 $|x-a|<\frac{\cos^2 a\cdot\varepsilon}{2}$，故取 $\delta_2=\frac{\varepsilon\cdot\cos^2 a}{2}>0$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时，有

$$|\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a|<\varepsilon.$$

在讲例 4 之前先证明两个不等式：

（1）证明 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$，当 $n>1$ 时。

（2）证明 $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$。

证（1）由第一章的例题选讲例12知，当 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$ 时，有 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$。由此依次得

$$\sqrt{1\cdot n}<\frac{n+1}{2},\ \sqrt{2\cdot(n-1)}<\frac{n+1}{2},\cdots,\sqrt{n\cdot 1}<\frac{n+1}{2}.$$

将这 n 个不等式两端分别相乘，即得

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n. \qquad (1)$$

证（2） 先证后半部. 由不等式（1）得

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n=\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

又因为$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是单调递增，且以 e 为极限，故有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,\quad n=1,2,\cdots,$$

由此得 $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot e$.

再证前半部. 由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$知

$$\frac{2}{1}<e,\ \frac{3^2}{2^2}<e,\ \cdots,\ \frac{(n+1)^n}{n^n}<e.$$

将这 n 个不等式两端分别相乘得

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}<e\cdot e\cdots e\ (n\text{ 个})$$

即
$$\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n$$

或
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!.$$

于是有

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n. \qquad (2)$$

例 4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

基本思路　利用不等式（2）来加强不等式。

证明　将不等式（2）变形

$$\frac{1}{e^n}\cdot n^n<n!<\frac{e}{2^n}\cdot n^n$$

用 n^n 除不等式，得

$$\frac{1}{e^n}<\frac{n!}{n^n}<\frac{e}{2^n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{2^n}=0$，再根据定理 2.7，故得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

例 5　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，$a>1$，$k$ 以为正实数。

基本思路　利用二项式定理加强不等式，再用两边夹定理证之。

证明　当 k 为正整数时，由于 $a>1$，令 $a=1+h$，且 $h>0$，则有

$$a^n=(1+h)^n=1^n+n\cdot 1^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 1^{n-2}h^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}1^{n-k-1}h^{k+1}+\cdots+h^n>$$
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1},$$

从而有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{n^k}{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}}$$
$$=\frac{(k+1)!}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)(n-k)h^{k+1}},$$

当 $n\to\infty$时，不等式的右端里的 $(k+1)!$，h^{k+1}都是常数，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n-k}=0,$$

于是，根据定理2.7的推论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\text{（当 }k\text{ 为正整数时）。}\qquad(3)$$

当 k 不是正整数时，任取一个大于 k 的正整数 k_1，从而有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{n^{k_1}}{a^n},$$

由于（3），故知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{k_1}}{a^n}=0$。于是，根据定理2.7的推论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\text{（当 }k\text{ 不是正整数时）。}$$

总之有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\ (a>1)$.

基本思路 将对数换成指数，并应用两边夹定理。

证明 令 $\log_a n=\alpha_n$，则 $n=a^{\alpha_n}$，原式为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{a^{\alpha_n}}.$$

因为当 $n\to\infty$时，$\alpha_n=\log_a n\to+\infty$，所以对于任意的 n 有

$$k_n\leqslant\alpha_n<k_n+1,\quad k_n\in N,\qquad(4)$$

显然，当 $n\to\infty$时，$k_n\to+\infty$。于是有

$$a^{k_n} \leqslant a^{\alpha_n} < a^{k_n+1}, \qquad (5)$$

综合考虑（4）和（5），将得

$$\frac{k_n}{a^{k_n+1}} < \frac{\alpha_n}{a^{\alpha_n}} < \frac{k_n+1}{a^{k_n}}.$$

由例5知，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n}{a^{k_n+1}} = \lim\limits_{k_n\to+\infty} \dfrac{k_n}{a^{k_n+1}} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n+1}{a^{k_n}} = \lim_{k_n\to+\infty} \frac{k_n}{a^{k_n}} + \lim_{k_n\to+\infty} \frac{1}{a^{k_n}} = 0.$$

根据定理 2.7，故得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a^{\alpha_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

到此为止，我们证明了：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad （例4）,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a>0, \quad （§2.3的例6）,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a>1, \quad （例5）$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a>1, \quad （例6）.$$

从这个例子中得到如下结论：当 $n\to\infty$ 时，n^n, $n!$, $a^n(a>1)$, n^k（为 k 正整数）和 $\log_a n$ 都趋向无穷大，且 n^n趋向无穷大的速度比 $n!$ 快，$n!$ 比 $a^n(a>1)$快，$a^n(a>1)$ 比n^k快，n^k比 $\log_a n$ 快.

这个结论对判别某些极限是否存在很有用．而且它们又可以推广到函数情形．

例 7 证明数列$\{x_n\} = \left\{\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}\right\}$

是收敛的．

基本思路 利用$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$和柯西收敛准则。

证明 对任意给定的$\varepsilon>0$，考察

$$|x_{n+p}-x_n|,$$

其中任意的 $n,P\in N$。为此有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right.\\ &\quad\left.+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\\ &\leqslant\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}\right|\\ &\quad+\cdots+\left|\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\\ &=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,\end{aligned}$$

从而解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$。

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，且对任意的$P\in N$，有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，根据柯西收敛准则，故知数列$\{x_n\}$收敛。

例 8 证明数列$\{x_n\}=\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$ 收敛。

基本思路 利用$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)>0$ 和柯西收敛准则。

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，考察

$|x_{n+p}-x_n|$,

其中任意的 n, $P\in N$. 为此有

$$|x_{n+p}-x_n| = \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n+1}-\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}-\cdots+(-1)^{p-2}\frac{1}{n+p}\right] ① < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

从而解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 故取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]>0$, 当$n>n_0$时，且对任意的 $P\in N$, 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$, 由柯西收敛准则，故知数列$\{x_n\}$收敛。

例 9 用柯西收敛准则证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2$存在极限。

---

①在放大的过程中，反复使用 $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)>0$, 而且在去掉绝对值这一步，则因为，如果 P 为偶数，则有$\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\right]>0$,如果P为奇数，则有 $\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\frac{1}{n+p}\right]>0$.同理，$\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+(-1)^{p-2}\frac{1}{n+p}>0$.

基本思路 利用限定变量法来加强不等式.

证明 首先考察

$$|x_1^2-x_2^2| = |x_1-x_2|\ |x_1+x_2|,$$

其中的 x_1, x_2 是任意的，且属于点 2 的去心邻域.

不妨设 $|x_1-2|<|x_2-2|$，这样则有

$$|x_1-x_2|<|x_1-2| + |2-x_2|<2|x_2-2|.$$

因为当 $x\to2$ 时，可以限定 $|x-2|<1$，即$1<x<3$，所以有

$$|x_1+x_2|<6.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|x_1^2-x_2^2| = |x_1-x_2|\ |x_1+x_2|<12|x_2-2|<\varepsilon,$$

解得 $|x_2-2|<\dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{12},1\right\}>0$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的 x_1, x_2，当$0<|x_1-2|<\delta$，$0<|x_2-2|<\delta$ 时，有

$$|x_1^2-x_2^2|<\varepsilon,$$

根据柯西收敛准则，故知$\lim\limits_{x\to2}x^2$存在极限.

例 7、例 8、例 9 表明：在利用柯西收敛准则证明函数（或数列）的极限存在时，由于不等式

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon \quad 和 \quad |f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

中出现两个任意的变量，这样就给解不等式带来困难，所以在加强不等式时，要想办法去掉一个变量，以便解不等式确定 n_0（或 δ）.

下面给出一题多种证法的例子.

例10 已知数列$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right\}$.

（1）用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

（2）用两边夹定理证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

（3）用单调有界定理证明该数列存在极限;

（4）用柯西收敛准则证明该数列存在极限.

证明 （1）对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n-1}<\varepsilon,$$

解得$n-1>\frac{1}{\varepsilon}$，$n>\frac{1}{\varepsilon}+1$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$，当$n>n_0$时，有

$$\left|\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}-0\right|<\varepsilon.$$

（2）由于有

$$\frac{n+1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{n+1}{n^2}$$

和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n)^2}=0$，根据定理2.7，故有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0.$$

（3）因为有$\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}$，$\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2n}$，所以有

$$\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}<\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{2}{(2n)^2}$$

$$=\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{n^2}.$$

从而得

$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}>x_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$+\frac{1}{(2n+2)^2},$$

其中$n=1,2,\cdots$，故知数列$\{x_n\}$是单调递减的．又因为$x_n>0(n=1,2,\cdots)$,所以数列$\{x_n\}$是下方有界的．

于是，根据定理2.8知数列$\{x_n\}$存在极限．

（4）对任意给定的$\varepsilon>0$，考察

$$|x_{n+p}-x_n|.$$

由于有 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，可建立如下的不等式

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p+1)^2}\right.$$

$$+\cdots+\frac{1}{[2(n+p)]^2}-\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\right|$$

$$<\left|\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+p+1}+\frac{1}{n+p+1}-\cdots-\frac{1}{2(n+p)}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right.$$

$$\left.\left.+\cdots-\frac{1}{2n}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{2(n+p)}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}\right|$$

$$<\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{2(n+p)}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}$$

$$<\frac{4}{n-1}<\varepsilon.$$

解得 $n>\frac{4}{\varepsilon}+1$，故取 $n_0=\left[\frac{4}{\varepsilon}+1\right]\in N$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{4}{\varepsilon}+1\right]$，当 $n>n_0$ 时，对于任意的 $P\in N$，有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，根据柯西收敛准则，故知数列 $\{x_n\}$ 存在极限。

例11　已知数列$\{a_n\}$，如果它的奇子列 $\{a_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{a_{2n}\}$均收敛于 a，则数列 $\{a_n\}$ 也收敛于 a。

证明　已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$，由极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有

$$|a_{2n-1}-a|<\varepsilon.$$

又已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$，由极限定义，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有

$$|a_{2n}-a|<\varepsilon.$$

取 $n_0=\max\{2n_1-1,\ 2n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0>0$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

例12　已知数列 $\{a_n\}$ 是由下列形式构成，$a_1=a$，$a_2=b$，$a_n=\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$ $(n=3, 4, \cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

基本思路　构造奇偶子列；用单调有界定理证明奇偶子列都存在极限；再利用例11证明它们极限相等。

证明　不妨假设 $a<b$。因为 a_n 为 a_{n-1} 和 a_{n-2}的算术平均数，所以有

$$a_1 < a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2$$

$$a_3 < a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} < a_2$$

$$a_3 < a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} < a_4$$

$$a_5 < a_6 = \frac{a_4 + a_5}{2} < a_4$$

$$a_5 < a_7 = \frac{a_5 + a_6}{2} < a_6$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

它的一般形式为

$$a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < \cdots < a_{2n-1} < \cdots < a_{2n} < \cdots < a_6 < a_4 < a_2.$$

故 $\{a_{2n-1}\}$ 及 $\{a_{2n}\}$ 分别为数列 $\{a_n\}$ 的奇、偶子列，同时，容易见到奇子列 $\{a_{2n-1}\}$ 是严格递增的且有上界，偶子列$\{a_{2n}\}$是严格递减的且有下界。根据定理2.8知 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均存在极限，设它们的极限分别是α，β。

另外，由于$a_{2n} = \dfrac{a_{2n-1} + a_{2n-2}}{2}$，$a_{2n+1} = \dfrac{a_{2n} + a_{2n-1}}{2}$，两边分别取极限得

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \alpha = \frac{\beta + \alpha}{2},$$

故知 $\alpha = \beta$。再根据例11，数列$\{a_n\}$也收敛于 α。

下面来求 α。为此列出

$a_3 = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$，$a_4 = \dfrac{1}{2}(a_2 + a_3)$，$\cdots$，$a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1})$，将这 $n-2$ 个等式两端相加，得

$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-1},$$

即 $$a_{n-1}+a_n=\frac{1}{2}a_1+a_2+\frac{1}{2}a_{n-1},$$

或 $$\frac{1}{2}a_{n-1}+a_n=\frac{1}{2}a_1+a_2.$$

两边取极限，故得

$$\frac{1}{2}\alpha+\alpha=\frac{1}{2}a+b,$$

从而解得

$$\alpha=\frac{a+2b}{3}.$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a+2b}{3}.$$

显然，当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

同理可证明 $a>b$ 的情形。

特别地：当 $a=0$，$b=1$ 时，数列$\{a_n\}$的极限为$\frac{2}{3}$.而且，它有明显的几何意义（如图 2.9）

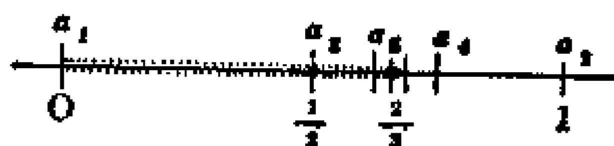


图2.9

因为 $a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{3}{4}$，$a_5=\frac{5}{8}$，…，而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$，在数值上就是有关一些线段长的和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots.$$

由等比数列前 n 项的和的公式

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}},$$

故得 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

例13 已知数列$\{a_n\}$是由下列形式构成：$a_1=a$，$a_2=b(0<a<b)$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ $(n=3,4,\cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

基本思路 同例12.

证明 因为 $0<a<b$，且 a_n 是 a_{n-1} 与 a_{n-2} 的比例中项$(n=3,4,\cdots)$，所以有

$$a_1<a_3<\cdots<a_{2n-1}<\cdots<a_{2n}<\cdots<a_4<a_2.$$

显然，数列 $\{a_n\}$ 的奇、偶子列均存在极限，分别设为 α，β.

另外，由于有

$$a_{2n}^2=a_{2n-1}a_{2n-2} \text{ 和 } a_{2n+1}^2=a_{2n}\ a_{2n-1},$$

对等式的两边取极限得

$$\beta^2=\alpha\cdot\beta,\quad \alpha^2=\beta\cdot\alpha.$$

故知 $\alpha=\beta$. 根据例11，数列 $\{a_n\}$ 也收敛于 α.

再来求 α. 为此列出

$$a_3=\sqrt{a_2a_1},\quad a_4=\sqrt{a_3a_2},\quad \cdots a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}},$$

将这 $n-2$ 个等式相乘，得

$$\begin{aligned}a_3a_4a_5\cdots a_{n-1}a_n&=\sqrt{a_1a_2a_2a_3a_3\cdots a_{n-2}a_{n-2}a_{n-1}}\\&=a_2a_3a_4\cdots a_{n-2}\sqrt{a_1a_{n-1}},\end{aligned}$$

约去 $a_3a_4\cdots a_{n-2}$ 后，有

$$a_{n-1}a_n=a_2\sqrt{a_1a_{n-1}},$$

即 $\sqrt{a_{n-1}}\cdot a_n=\sqrt{a}\cdot b,$

取极限得

$$\sqrt{a}\cdot a=\sqrt{a}\cdot b,$$

从而解得

$$a=\sqrt[3]{ab^2}.$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt[3]{ab^2}$。

特别地：当$a=1$，$b=2$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt[3]{4}$。

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=4$时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 16}=2$ 等等。

例14 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

基本思路 利用两边夹定理。

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由极限的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

即 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$。

当然有

$$a-\varepsilon<a_{n_0+1}<a+\varepsilon,$$

$$a-\varepsilon<a_{n_0+2}<a+\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a-\varepsilon<\ a_n\ <a+\varepsilon,$$

将这 $(n-n_0)$ 个不等式相加，得

$$(n-n_0)(a-\varepsilon)<a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_n$$
$$<(n-n_0)(a+\varepsilon),$$

或 $$(n-n_0)(a-\varepsilon)<(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n_0})$$
$$<(n-n_0)(a+\varepsilon),$$

都除以 n 得

$$\left(1-\frac{n_0}{n}\right)(a-\varepsilon)<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0}}{n}$$

$$<\left(1-\frac{n_0}{n}\right)(a+\varepsilon).$$

对固定的 n_0，当 $n\to\infty$ 时，有

$$a-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant a+\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

特别地：如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right)=1.$$

例15 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，且 $a_n>0$（$n=1, 2, \cdots$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$.

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，由极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_1=a(e^\varepsilon-1)$ 与 $\varepsilon_2=a(1-e^{-\varepsilon})$. 显然，$\varepsilon_1$ 与 ε_2 也是任意的正数. 存在$n_1\in N$，当 $n>n_1$ 时，有

$$-\varepsilon_2<a_n-a<\varepsilon_1,$$

即
$$a(e^{-\varepsilon}-1)<a_n-a<a(e^\varepsilon-1),$$

$$e^{-\varepsilon}-1<\frac{a_n-a}{a}<e^\varepsilon-1,$$

$$e^{-\varepsilon}<\frac{a_n-a}{a}+1<e^\varepsilon,$$

$$e^{-\varepsilon}<\frac{a_n}{a}<e^{\varepsilon}.$$

取以 e 为底的自然对数，有

$$-\varepsilon<\ln\frac{a_n}{a}<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<\ln a_n-\ln a<\varepsilon,$$

$$|\ln a_n-\ln a|<\varepsilon.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a.$$

例16 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

基本思路 利用例15将乘积的形式变成和的形式，再利用例14即可证得.

证明 先讨论 $a>0$. 令 $b_n=\ln a_n$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，利用例15，所以得

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a.$$

将 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ 取对数，有

$$\ln(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n),$$

根据例14知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln a,$$

即 $$\ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$$

$$=\ln a,$$

于是得：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=e^{\ln a}=a.$

特别地：如果$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

不仅如此，还可以应用例16证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

事实上，设$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

而

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\frac{(n+1)^n}{n!},$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}},$$

根据例16，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}+\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n=e.$$

于是，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1}\right)=e.$$

例17 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正的实数，且A为这些数中的最大者，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=A.$$

基本思路 利用两边夹定理和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

证明 已知 $A=max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，由不等式

$$A^n<a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant mA^n$$

得
$$\sqrt[n]{A^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{mA^n},$$

即
$$A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\cdot A.$$

因为m为确定的自然数，由§2.1例6知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，所以根据定理2.7知

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=A.$$

特别地：可证

$$\lim_{n\to\infty}(1^n+2^n+\cdots+m^n)^{\frac{1}{n}}=m,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{m}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=1\text{等等.}$$

例18 已知数列$\{a_n\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a$，

则有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

基本思路 利用极限定义和$\left(\frac{a_n}{n}-a\right)$的恒等变型：

$$\frac{a_n}{n}-a=\frac{a_{n_1}-an_1}{n}+\left(1-\frac{n_1}{n}\right)\left(\frac{a_n-a_{n_1}}{n-n_1}-a\right).$$

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a$，由极限定义，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_1\in N$，当$n>n_1$时，有

$$|(a_n-a_{n-1})-a|<\varepsilon,$$

即
$$a-\varepsilon<a_n-a_{n-1}<a+\varepsilon.$$

不仅如此，当$n>n_1$时，还有

$$a-\varepsilon<a_{n_1+1}-a_{n_1}<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<a_{n_1+2}-a_{n_1+1}<a+\varepsilon,$$

$$\cdots, a-\varepsilon<a_n-a_{n-1}<a+\varepsilon,$$

将这 $n-n_1$ 个不等式相加得

$$(n-n_1)(a-\varepsilon)<a_n-a_{n_1}<(n-n_1)(a+\varepsilon),$$

$$a-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n_1}}{n-n_1}<a+\varepsilon,$$

即 $$\left|\frac{a_n-a_{n_1}}{n-n_1}-a\right|<\varepsilon. \tag{8}$$

又因为

$$\frac{a_n}{n}-a=\frac{a_{n_1}-an_1}{n}+\left(1-\frac{n_1}{n}\right)\left(\frac{a_n-a_{n_1}}{n-n_1}-a\right),$$

且当 $n>n_1$ 时，有 $\left|1-\frac{n_1}{n}\right|<1$，所以有

$$\left|\frac{a_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{a_{n_1}-an_1}{n}\right|+\left|\frac{a_n-a_{n_1}}{n-n_1}-a\right|,$$

由于对固定的 n_1，$(a_{n_1}-an_1)$ 是个常数，因此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n_1}-an_1}{n}=0,$$

由极限的定义，对同一个 $\varepsilon>0$，存在$n_2\in N$，当 $n>n_2$ 时，有

$$\left|\frac{a_{n_1}-an_1}{n}\right|<\varepsilon. \tag{9}$$

取 $n_0=max\{n_1, n_2\}$，当 $n>n_0$ 时，不等式（8）和（9）同时成立。这样就有 $\left|\frac{a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

特别地：对任何一个收敛数列 $\{a_n\}$，因有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})$

$=0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0.$$

例19　如果有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l$，且 $b\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=bl.$$

基本思路　引进新的变量 $y=bx$。

证明　令 $bx=y$，当 $x\to 0$ 时，也有 $y\to 0$. 则 有

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{f(bx)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}b=bl.$$

特别地：如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a(a\neq 0)$.

如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}bx}{x}=b(b\neq 0)$.

如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$（见§2.5例5），则有

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{(1+cx)^n-1}{x}=cn\ \ (c\neq 0)\text{等等}.$$

例20　如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$，且 $c>b$，则存在某个$\delta_0>0$，当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时，有 $g(x)>f(x)$。

基本思路　变成定理2.13的情况证明。

证明　令 $h(x)=g(x)-f(x)$，根据运算法则，有

$$\lim_{x\to a}\ h(x)=\lim_{x\to a}(g(x)-f(x))=c-b,$$

因为 $c>b$，所以 $c-b>0$；应用定理2.13，存在 $\delta_0>0$，当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时，有

$$h(x)=g(x)-f(x)>0,$$

即

$$g(x)>f(x).$$

例21　如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$，存在 $\delta_0>0$，当$0<$

$|x-a|<\delta_0$ 时，有 $g(x)>f(x)$，则 $c\geqslant b$.

证明 用反证法。假设 $c<b$. 根据例20，存在 $\delta_1>0$，且让 $\delta_1<\delta_0$，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，有 $f(x)-g(x)>0$，即$f(x)>g(x)$，与已知条件矛盾.

例22 如果$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，且$A>0$，则存在$X_0>0$，当$|x|>X_0$时，有 $f(x)>0$。

基本思路 与定理2.2类似。

证明 已知$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A>0$，由极限定义，对取定的$\varepsilon_0=\frac{A}{2}>0$，存在 $X_0>0$，当$|x|>X_0$时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2},$$

或
$$-\frac{A}{2}<f(x)-A<\frac{A}{2},$$

由此可得

$$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0,$$

即当$|x|>X_0$ 时，有 $f(x)>0$。

例23 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的充要条件是：在函数 $f(x)$ 的定义域内，对任意数列$\{x_n\}$，且$x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

基本思路 这是 $x\to+\infty$时的海涅极限定理，证法与定理2.23类似。

证明 **必要性** 已知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，由极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，由无穷大的定义，对上面的 $X_0>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $x_n>X_0$，

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时（当然有

$x_n > X_0$），有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

充分性 用反证法．假设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$，即存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意的$X>0$，存在某个 $x_0>X$，有

$$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

于是

取 $X=1$，存在 x_1，当 $x_1>1$ 时，有$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $X=2$，存在 x_2，当$x_2>2$ 时，有 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

……………………………………………

取 $X=n$，存在 x_n，当 $x_n>n$ 时，有$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

……………………………………………

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，与已知条件矛盾．

例24 利用海涅极限定理证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x^2$ 不存在．

基本思路 利用例23的必要性．

证明 取数列

$$\{x_n\}=\left\{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\},\ \{x'_n\}=\{\sqrt{2n\pi}\},$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=+\infty$．而对应的函数数列的极限为

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos x_n^2=\lim_{n\to\infty}\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty}\cos x'^2_n=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi)=1.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$，由例23的必要性推知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x^2$不存在．

例25 已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}(a>0), & -1<x<0,\\[2mm] \dfrac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}(m\neq0), & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

问 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在。

基本思路 根据定理2.11：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在极限的充要条件是：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限存在且相等。

解 因为

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}=m,$$

而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限为

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+a^2}+a)}$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a},$$

因此，根据定理2.11，$f(x)$ 在 $x=0$处存在极限的充要条件是

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=m=\frac{1}{a}=\lim_{x\to 0-0} f(x),$$

从而解得：$a=\frac{1}{m}$。

例26 问 a,b 为何值时，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$ 成立。

基本思路 根据无穷大量阶的比较。

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

即，当 $x\to\infty$ 时，$(x+1)$ 较 $[(1-a)x^2-(a+b)x+1-b]$ 为高阶无穷大①，所以在 $[(1-a)x^2-(a+b)x+1-b]$ 中必有

$$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0,\end{cases}$$

从而解得：$a=1$，$b=-1$。

例27　设 $p(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=3$，求 $p(x)$。

基本思路　根据无穷小量，无穷大量阶的比较。

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)-2x^3}{x^2}=1$，所以 $p(x)-2x^3$ 与 x^2 是等价的无穷大，即在 $p(x)$ 中的最高次项为 $2x^3$，二次幂项为 x^2，此时 $p(x)=2x^3+x^2+ax+b$，其中 a,b 为待定的常数。

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=3$，所以 $p(x)=2x^3+x^2+ax+b$ 与 x 是同阶的无穷小，从而得 $b=0$，$a=3$。于是，

$$p(x)=2x^3+x^2+3x。$$

例28　求下列函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to k-0}[x]$（$k$ 为整数）；　（2）$\lim\limits_{x\to k+0}(x-[x])$（$k$ 为整数）；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$；　（4）$\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{x}{1+x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$；　（6）$\lim\limits_{x\to 2k\pi+0}\operatorname{sgn}\sin x$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

基本思路　根据这些函数的构成特点求其极限。

---

① 如果极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 是无穷大，则称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中为 x 的高阶无穷大。

解（1）因为$[x]$代表 x 的整数部分，所以有

$$\lim_{x\to k-0}[x]=\lim_{x\to k-0}(k-1)=k-1.$$

（2）因为 $x-[x]=\{x\}$，即 x 的小数部分，所以有

$$\lim_{x\to k+0}(x-[x])=\lim_{x\to k+0}\{x\}=0.$$

（3）因为$\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\left\{\frac{1}{x}\right\}$，即$\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}$，和$0\leqslant\left\{\frac{1}{x}\right\}<1$（见图1.34），所以有

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}x\cdot\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

$$=1\text{（应用定理2.20）。}$$

（4）因为 $x\to-1+0$，所以 $1+x>0$，从而有

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{1+x}=-\infty.$$

（5）因为 $x\to 0-0$，所以$\frac{1}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，从而有

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

（6）因为函数 $\operatorname{sgn}\sin x$ 在$(2k\pi,(2k+1)\pi)$上是正 1，所以有

$$\lim_{x\to 2k\pi+0}\operatorname{sgn}\sin x=\lim_{x\to 2k\pi+0}1=1.$$

例29 求下列极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，$|x|<1$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$，$|x|<m$。

解（1）令 $a_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$，有

$$(1-x)a_n=(1-x)[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=(1-x^2)\cdot(1+x^2)[(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$$
$$=1-x^{2^{n+1}}.$$

因为 $|x|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，从而得

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)a_n=\lim_{n\to\infty}(1-x^{2^{n+1}})=1,$$

于是，$\lim a_n=\frac{1}{1-x}$。

（2）令 $b_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$，则有

$$2^n\sin\frac{x}{2^n}\cdot b_n=2^n\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\cdots=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sin x。$$

即
$$b_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}},$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{\sin x}{x}$。

（3）因为 n→∞，所以下面的不等式当$n>m$时成立（即$n-m>0$）：

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|$$

$$< \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{|x|}{n+1}+\frac{|x|^2}{(n+1)^2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{|x|^{n-1}}{(n+1)^{n-1}}\right] < \frac{m^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-\left(\frac{|x|}{n+1}\right)^n}{1-\frac{|x|}{n+1}}$$

$$< \frac{m^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{n+1}} < \frac{m^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{m}{n+1}}.$$

由于有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m^{n+1}}{n!}\cdot\frac{1}{n-m}=0,$$

于是得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0.$$

例30 作下列函数的图形.

（1）$y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})$, $(-1\leqslant x\leqslant 1)$;

（2）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$, $(x\geqslant 0)$;

（3）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, $(x\neq 0)$;

（4）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

解（1）当 $|x|=1$ 时，显然 $y=0$; 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$, $y=1$. 于是有

$$y=\begin{cases}1, & 当\ |x|<1,\\ 0, & 当\ |x|=1;\end{cases}$$

如图2.10示.

（2）当 $0\leqslant x<1$ 时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, 因此 $y=0$;

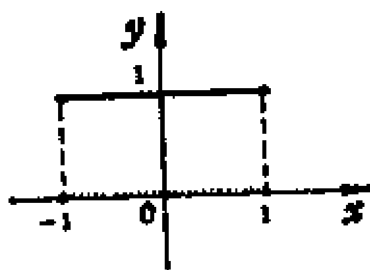


图2.10

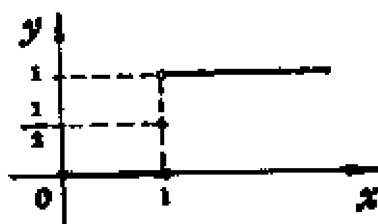


图2.11

当 $x=1$ 时，显然 $y=\frac{1}{2}$；

当 $x>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$，因此有

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}=1;$$

于是有

$$y=\begin{cases}0, & \text{当 } 0<x<1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x>1 \text{ 时},\end{cases}$$

如图2.11示。

（3）当 $0<|x|<1$ 时，$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=-1$；

当 $|x|=1$ 时，$y=0$；

当 $|x|>1$ 时 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{-2n}}{1+x^{-2n}}=1$，即

$$y=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$$

如图2.12示。

（4）只须讨论 $0\leqslant x\leqslant\pi$。

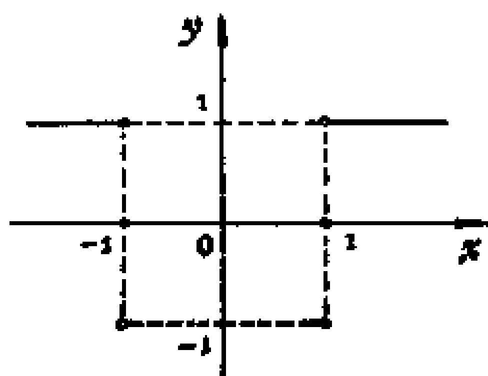


图2.12

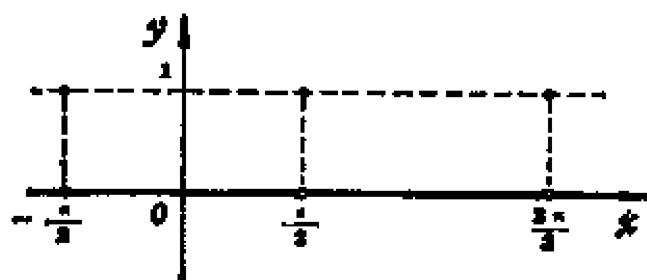


图2.13

当 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时，由于

$$0 \leqslant \sin x < 1,$$

因此， $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin x)^{2n} = 0$；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，由于 $\sin x = 1$，$(\sin x)^{2n} = 1$，因此有 $y = 1$，于是

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \text{且} x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

由于函数是 $2n$ 次幂，因此函数是以 π 为周期，故可推广到实数轴，如图2.13示。

例31 当 $x \to 0$ 时，证明 $(1+x)^n = 1 + nx + o(x), n \in N$。

证明 只须证 $(1+x)^n - (1+nx) = o(x)$，事实上，

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - (1+nx)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n\right) - (1+nx)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{n(n-1)}{2!}x+\cdots+x^{n-1}\right)=0,$$

于是，$(1+x)^n-(1+nx)=o(x)$。

例32 当 $x\to 0$ 时，求下列各无穷小量关于无穷小量 x 的阶：

（1）$x^5+x^3-1000x^2$；（2）$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$；

（3）$\cos x-\cos 3x$。

基本思路 一般作法：将各无穷小量分别地除以 x^λ（其中 λ 为待定的数），求其极限，使极限为常数（但不为零），λ 就是无穷小量的阶。

解（1）因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+x^3-1000x^2}{x^\lambda}=-1000\text{（令 }\lambda=2\text{）},$$

所以 $x^5+x^3-1000x^2=O(x^2)$。

（2）因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x^\lambda}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t^{3\lambda}}\quad\text{（令}\sqrt[3]{x}=t\text{）}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z^3-1)^{3\lambda}}\quad\text{（令 }1+t=z^3\text{）}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^1}{(z-1)^{3\lambda}(z^2+z+1)^{3\lambda}}$$

$$=\frac{1}{3}\quad\text{（令}3\lambda=1,\ \lambda=\frac{1}{3}\text{）},$$

所以 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1=O(x^{\frac{1}{3}})$，

（3）因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^\lambda}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 3x}{x^\lambda}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{\lambda}} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^{\lambda}}\cdot 3^{\lambda}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\ (令\ \lambda=2)$$

$$= 4.$$

所以 $\cos x-\cos 3x = O(x^2)$.

例33 当 $x\to 1$ 时，求下列各无穷小量关于无穷小量 $x-1$ 的阶：

（1）x^3-x^2-x+1；（2）$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

基本思路 同例32.

解（1）因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^{\lambda}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^{\lambda}}$$

$$= 2\ (令\lambda=2),$$

所以 $x^3-x^2-x+1 = O\left((x-1)^2\right)$.

（2）因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{(x-1)^{\lambda}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^{\frac{1}{3}}}{(t^2-2t)^{\lambda}}\ (令\ 1-\sqrt{x}=t)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\lambda}(t-2)^{\lambda}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\ (令\ \lambda=\frac{1}{3}),$$

所以 $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = O\left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right)$.

例34 当 $x\to+\infty$ 时，求下列各无穷小量关于无穷小量 $\frac{1}{x}$ 的阶：

（1）$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$；（2）$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$。

基本思路 同例32。

解（1）因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\frac{1}{x^{\lambda}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\lambda}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\ \left(\text{令 }\lambda=\frac{1}{2}\right),$$

所以 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

（2）因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{\lambda}}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda-1}\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\ (\text{令 }\lambda=2).$$

所以 $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{2}\right)$.

习　　题

§2.1

用极限定义证明下列极限。

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+1}=\frac{1}{4}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n^2+1}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+n+1}=\frac{2}{3}$,　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n-1}{2n^3-3}=\frac{5}{2}$.

2. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0,(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0,(|q|<1)$.

§2.2

4. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>p$（或 $a<p$）。则必存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有$a_n>p$（或 $a_n<p$）。

5. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a>b$，则存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有$a_n>b_n$。

6. 求下列数列的极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n+2}{5n-1}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2-n+3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+1}}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})$;　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+7^n}{(-1)^{n+1}+7^{n+1}}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$,（$|a|<1$, $|b|<1$）;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right]$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot6}+\frac{1}{6\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(4n-2)(4n+2)}\right]$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$;

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

§2.3

7．证明数集 $E=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$的上确界是1，下确界是 0 。

8．证明数集 $E=\{y\mid y\in(0,1)\}$的上确界是1，下确界是 0 。

9．证明数集 $E=\{0,2,4,6,\cdots\}$ 的下确界是 0 。

10．如果有界数集 A 是由数集B 的相反数组成，则有

（1）$\inf A=-\sup B$，（2）$\sup A=-\inf B$。

11．判断下列数列的收敛性：

（1）$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right\}$；

（2）$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot4\cdots(2n)}\right\}$；

（3）$x_1=\sin a$，$x_2=\sin\sin a,\cdots$，$x_n=\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n\text{个}}a$，$\cdots$，其中$0<a<1$。

12．如果数列 $\{a_n\}=\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right)=0.$$

13．如果数列$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

14．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{m}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=1$，其中 m 为确定的正整数。

15．证明：对任何一个收敛数列$\{a_n\}$均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0.$$

16．如果数列$\{a_n\}$是递增的，数列$\{b_n\}$是递减的，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$必收敛于同一个极限。

17．如果$a_1=1$，$a_2=2$，…，$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$，…，则$\{a_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

18．如果$a_1=1, a_2=2$，…，$a_{n+2}=\sqrt{a_n a_{n+1}}$，…，则$\{a_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

19．用柯西收敛准则判别下列数列的敛散性。

（1）$\{x_n\}=\left\{\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right\}$；

（2）$\{x_n\}=\left\{\frac{\cos 3}{3}+\frac{\cos 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\cos 3^n}{3^n}\right\}$；

（3）$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}\right\}$；

（4）$\{x_n\}=\{(-1)^n n\}$。

§2.4

20．用函数极限定义证明。

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x+1}=0$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+5x+3}=1$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^3-x+1}=0$；（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^5}{1+x^2+4x^5}=-\frac{1}{4}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{-3x+5}=\frac{1}{5}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}x^3\operatorname{sgn}x=0$；

（7）$\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{2x^2+1}{-x^3+2}=1$；（8）$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$。

21．利用不等式叙述下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=A$；（4）$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=0$。

22．判别下列函数在$x=0$处的极限是否存在。

（1）$f(x)=|x|$；（2）$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$；

（3）$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 当\ x>0\ 时，\\ 0, & 当\ x<0\ 时。\end{cases}$

（4）$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当}x>0\text{ 时}, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 }x<0\text{ 时}。\end{cases}$

23．求下列函数的极限，

（1）$\lim\limits_{x\to k+0}[x]$；（2）$\lim\limits_{x\to k-0}(x-[x])$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$；　（4）$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{[x]}{1+x}(1-x^2)$。

§2.5

24．求下列函数极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+5}{3x^2+x+2}$；（2）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+3x^2+3x+2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5}$；（4）$\lim\limits_{x\to -27}\dfrac{\sqrt{9-x}-6}{\sqrt[3]{x}+3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{4x^4+x^3+x+1}$；（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-1}+x)^3}{(\sqrt{x^3+1}+1)^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$；（10）$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$；　（12）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；

（13）$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

（14）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$。

25．已知 $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，其中 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，且 $n\leqslant m$，求$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)$。

26．设函数

$$f(x)=\begin{cases} ax+1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x+7}-2}, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$$

问 a 为何值时，使 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在。

27．如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在。对于 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 呢？

28．如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 皆不存在，可否断定 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在？举例证明之。

29．画出下列函数图形。

（1）$y=\lim\limits_{n\to\infty}(x^{2n-1}-1)$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$；

（2）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$。

§2.6

30．求下列函数极限。

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin5x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$；（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos5x}{x^2}$；（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt{\cos3x}}{x^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}$；（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$；（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$；（12）$\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$。

31．叙述 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 存在的柯西准则。并用它证明：$\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}$ 不存在。

32．叙述 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的柯西准则。并用它证明：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 存在。

§2.7

33. 利用不等式表达如下事实：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$；（2）$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$；

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$；（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

34. 当 $x\to0$ 时，求下列各无穷小量关于无穷小量 x 的阶：

（1）$\dfrac{20x^{20}}{x^3+1}$；（2）$\sin5x-\sin3x$；

（3）$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$；（4）$\sqrt{1-\cos x^2}$。

35. 当$x\to1$时，求下列各无穷小量关于无穷小量 $x-1$ 的阶：

（1）x^3-3x+2；（2）x^n-1（n 为正整数）。

36. 当 $x\to+\infty$时，求下列各无穷小量关于无穷小量$\dfrac{1}{x}$的阶：

（1）$\dfrac{x+1}{x^4+1}$；（2）$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$。

37. 利用定理2.22求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin2x}$。

§2.8

38. 利用海涅极限定理证明：

（1）数列$\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$不收敛；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{2x}$不存在；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$不存在。

39. 利用海涅极限定理证明定理2.16。

40. 数列$\{x_n\}$用如下方法构成：$x_1\in[0,1]$，当 $n\geqslant2$时，如果n为偶数，就有$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$；如果 n 为奇数，就有$x_n=\dfrac{1+x_{n-1}}{2}$。试问数列$\{x_n\}$是否存在极限？

第三章　连续函数

在第二章里，我们给出了研究函数变化趋势的方法——极限。本章我们将应用极限这个工具研究函数的连续性。在许许多多的函数中，连续函数是最基本的一类，在数学分析中占有重要地位。这不仅是因为连续函数本身具有很多好的性质，而且，数学分析中的主要概念基本上是建立在连续函数的基础上。

本章将给出函数连续性的定义，讨论连续函数的性质和初等函数的连续性。

§3.1　函数的连续与间断

关于"连续"这个词，人们在日常生活和生产实践中是不陌生的。例如，生物的连续生长；流体的连续流动；机器的连续运转等等。然而，在数学中只限于这些直观的、感性的认识是不够的，必须给"连续"下一个精确的数学定义。

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{3.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **连续**，且称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**连续点**；否则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **间断（不连续）**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**间断点（不连续点）**。

为了给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续"定义"的另一种形式。把 $\Delta x=x-x_0$ 称为**自变量 x 在 x_0 的改变量**；$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 称为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 对应于 Δx 的改变量**。①

---

① 有时把 Δx、Δy 也称为增量，增量可以是正数，也可以是负数或零；一般要求 $x=x_0+\Delta x$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域。

根据定理 2.15，（3.1）式与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$是等价的，于是，（3.1）式可用

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \tag{3.2}$$

来表示。

因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义是通过极限形式来表达的，所以（3.1）和（3.2）都可以用"ε—δ"语言来叙述。现列表如下：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$
对任意给定的$\varepsilon>0$	对任意给定的$\varepsilon>0$
存在$\delta>0$	存在$\delta>0$
当$\|x-x_0\|<\delta$时	当$\|\Delta x\|<\delta$ 时
有 $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$	有 $\|\Delta y\|<\varepsilon$

函数连续的定义表明：

（1）函数 $f(x)$在点 x_0 连续，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 不仅存在极限，并且极限就等于该点的函数值。一般来说，函数 $f(x)$在点 x_0存在极限，函数 $f(x)$ 在点 x_0 可能没有定义，即使有定义，其极限也不一定等于该点的函数值。为了比较两者的异同，现列表对比如下：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
对任意给定的$\varepsilon>0$	对任意给定的 $\varepsilon>0$
存在 $\delta>0$	存在 $\delta>0$
当$0<\|x-x_0\|<\delta$对（因 $f(x)$在点 x_0 极限与 $f(x)$ 在点 x_0无关，所以 $x\neq x_0$，即$0<\|x-x_0\|$）	当 $\|x-x_0\|<\delta$时（因点 x_0 属于$f(x)$的定义域，所以应包括点 x_0）
有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	有$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$

（2）根据定理2.19，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，又可等价地写成如下形式：

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x), \tag{3.3}$$

其中，当$x\to x_0$时， $\alpha(x)\to 0$。

定义 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0)$① （或$(x_0, x_0+\delta)$，其中$\delta>0$）内有定义。如果有

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \quad (\text{或}\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0**左（或右）连续**。

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续和左、右连续的定义，立即得到：函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：函数 $f(x)$ 在点x_0处既左连续，又右连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \tag{3.4}$$

定义 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ **在开区间 $(a,\ b)$ 内连续**。

定义 如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 内连续，且在点a为右连续，在点 b 为左连续，则称函数 $f(x)$ **在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续**。

例 1 函数 $f(x)=5x-2$在点 $x=2$ 连续。因为在§2.4的例 5 中已证明

$$\lim_{x\to 2}(5x-2)=8=f(2).$$

例 2 函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续。因为在§2.7的例 1 中已证明

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0).$$

例 3 证明$f(x)=|x|$ 在点 $x=0$处连续。

---

① 点x_0的左（或右）邻域，即邻域 $0<x_0-x<\delta$（或$0<x-x_0<\delta$）。

证明 因为

$$\lim_{x\to 0-0}|x| = \lim_{x\to 0-0}(-x) = 0 = f(0)$$

和
$$\lim_{x\to 0+0}|x| = \lim_{x\to 0+0}x = 0 = f(0),$$

所以函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$处既是左连续，又是右连续。由（3.4）知函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$处连续。

例 4 证明有理整函数（多项式） $P(x)$ 和有理分函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$在其定义域上都连续。

证明 因为多项式 $P(x)$的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，对任意一点 $x_0\in(-\infty, +\infty)$，由§2.5的例 1 知

$$\lim_{x\to x_0}P(x) = P(x_0),$$

所以有理整函数$P(x)$在其定义域上是连续的。

又因为有理分函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的定义域为 $A=\{x\,|\,x\in R$，且$Q(x)\neq 0\}$，对任意的 $x_0\in A$，由§2.5的例 2 知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

所以有理分函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$在其定义域A上也是连续的。

例 5 证明三角函数 $f(x)=\sin x$在其定义域$(-\infty, +\infty)$上连续。

证明 因为对任意 $x_0\in(-\infty, +\infty)$，由§2.4的例 6 知

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0,$$

所以函数 $f(x)=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$上是连续的。

同理可证 $f(x)=\cos x$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$ 上是连续的。

例 6 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x<0, \\ a+x, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

问 a 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的。

解 由本节的例4和例5知，函数 $\cos x$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是连续的，而函数 $a+x$ 在 $[0, +\infty)$ 上也是连续的，现只须讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的情况。已知

$$\lim_{x\to 0-0}\cos x = 1 \text{ 和 } \lim_{x\to 0+0}(a+x) = a,$$

以及 $f(0)=a$，由条件 (3.4) 知，当 $a=1$ 时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例 7 如果函数 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上是连续的，则函数 $|f(x)|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是连续的。

证明 在 $(-\infty, +\infty)$ 内任取一点 x_0，已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，当然 $f(x)$ 在点 x_0 连续，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

利用第一章习题3的不等式 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$，可证函数 $|f(x)|$ 在点 x_0 也是连续的，即对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

于是，函数 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续。

由于 x_0 的任意性，故知函数 $|f(x)|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

§ 3.2 函数间断点的分类

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，必同时满足下列三个条件：

(1) 点 x_0 属于函数 $f(x)$ 的定义域，即 $f(x_0)$ 有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，即 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 存在，且 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$；

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$。

因此说，凡不满足上述三条之一者函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断。

为了更好地理解连续和间断的概念，现将函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的条件与间断的条件列表对比如下：

连续：$f(x)$ 在点 x_0 满足如下三条者	间断：$f(x)$ 在点 x_0，满足如下三条之一者
(1)．点 x_0 属于 $f(x)$ 的定义域，即 $f(x_0)$ 有定义；	(1)．点 x_0 不属于 $f(x)$ 的定义域，即 $f(x)$ 在 x_0 没定义；
(2)．极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 存在，且 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$；	(2)．极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，即，或 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 存在而不等，或 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 至少有一个不存在；
(3)．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$．	(3)．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A\neq f(x_0)$．

函数的间断点按如下情形分类：

1　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0) \text{ 或 } f(x_0) \text{ 没有意义，}$$

则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**。

例如，函数 $f(x)=|\operatorname{sgn}x|$，由于有

$$\lim_{x\to 0+0}|\operatorname{sgn}x|=\lim_{x\to 0-0}|\operatorname{sgn}x|=1\neq f(0)=0,$$

因此点 0 为 $f(x)=|\operatorname{sgn}x|$ 的可去间断点。要想使得函数 $f(x)=|\operatorname{sgn}x|$ 在点 0 连续，只须改变函数在点 0 的函数值，令

$$f(x)=\begin{cases}|\operatorname{sgn}x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

显然，此函数在点 0 是连续的。

又如，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，由于有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

但是 $f(0)$ 没有意义，因此点 0 为函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断

点．要想使得函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在点 0 连续，只须补充定义函数 $f(x)$ 在点 0 的函数值，令

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则此函数在 0 连续．

2　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在左右极限，但

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)\neq\lim_{x\to x_0-0}f(x),$$

则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点．

例如，函数 $f(x)=\mathrm{sgn}x$，由于有

$$\lim_{x\to 0+0}\mathrm{sgn}x=1,\quad \lim_{x\to 0-0}\mathrm{sgn}x=-1,$$

因此点 0 为符号函数 $f(x)=\mathrm{sgn}x$ 的跳跃间断点．

又如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 0,\\ x-2, & x<0,\end{cases}$$

由于有

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x+2)=2,$$

和
$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x-2)=-2,$$

因此点 0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点（如图3.1）．

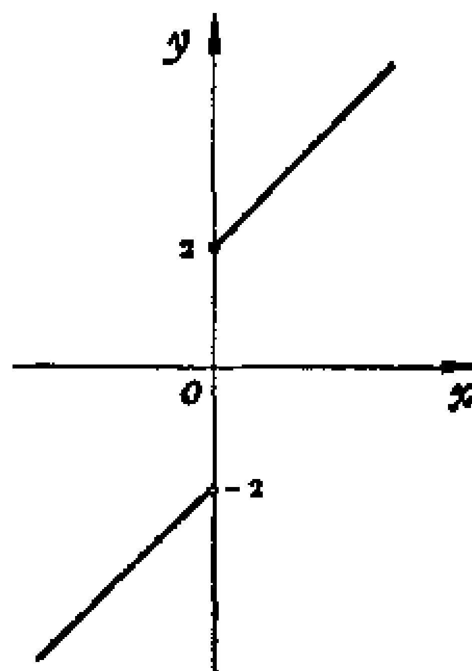


图3.1

把可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**．可见在第一类间断点处函数 $f(x)$ 存在左、右极限．

3　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处至少有一侧的极限不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**．

例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$，

由于

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

因此点 1 为函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的第二类间断点（如图3.2）。

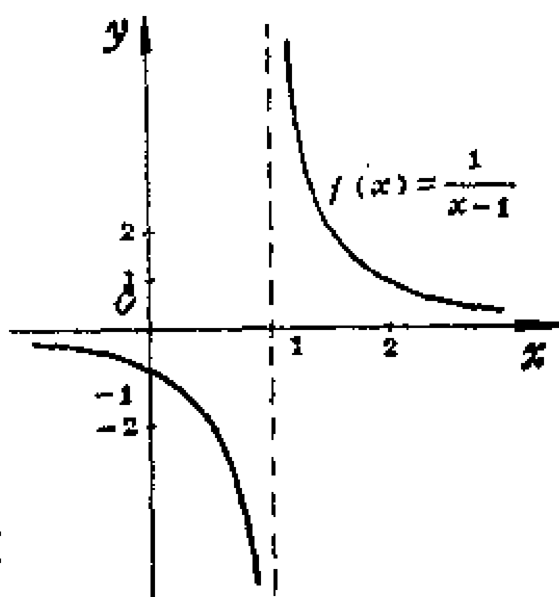


图3.2

函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，在§2.6的例 7 已经证明，$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，即当 $x\to 0$时，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$的函数值在 -1 和 1 之间无限次摆动．因此点 0 为函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$的第二类间断点（如图2.8）．

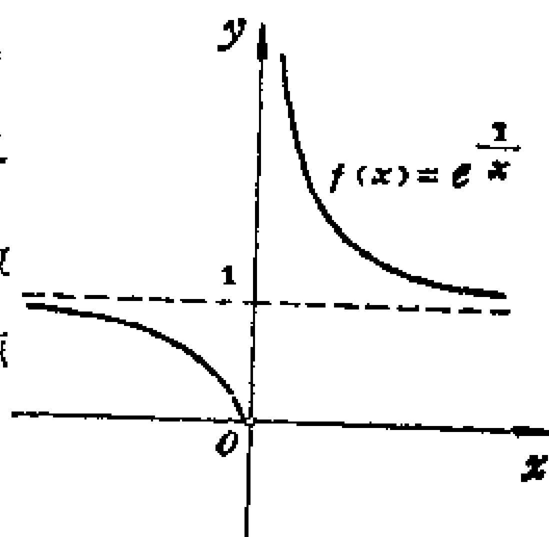


图3.3

函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，由于

$$\lim_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to 0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

即函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$在点 0 的右极限不存在，因此点 0 为函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点（如图3.3）．

狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,}\end{cases}$$

在任一点 $x=x_0$ 都不存在极限．事实上，任取以 x_0 为极限的有理数数列 $\{x_n\}$和无理数数列 $\{x_n'\}$。由于，有 $D(x_n)=1$，$D(x_n')=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n)=1,\quad \lim_{n\to\infty} D(x_n')=0.$$

根据海涅极限定理，故知极限$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在．因此说狄利克莱函数在整个数轴上处处间断，且都是第二类间断点．

§3.3 连续函数的运算

一 连续函数的四则运算

由函数在一点连续的定义和§2.5的函数极限运算法则，可推得连续函数的四则运算法则．

定理3.1 如果函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都在点 x_0 连续，则 $f_1(x)\pm f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$，$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x_0)\neq 0)$ 也都在点x_0 连续．

证明 只证乘积的情形．

已知函数 $f_1(x)$与 $f_2(x)$都在点 x_0 连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0).$$

根据函数乘积的极限定理2.15，有

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot f_2(x)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)\cdot f_2(x_0).$$

再根据函数在一点连续的定义，故知函数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 在点x_0 连续． □

例1 在§3.1的例5 中已证明 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是连续的，而且

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

根据定理3.1知 $\operatorname{tg}x$ 和 $\operatorname{ctg}x$ 在它们的定义域上也都是连续的。

例 2 讨论函数

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}+\frac{x^3}{x^2-1}$$

的连续性。

解 首先看第一项。由于 $\operatorname{tg}x$ 在其定义域 $A=\{x|\ x\in R$, 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)\}$ 是连续的，而 $\frac{1}{x^2}$ 在其定义域 $B=\{x|\ x\in R$, 且 $x\neq0\}$ 也是连续的。因此根据定理3.1，$\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}$ 在 $A\cap B=\{x\ |x\in R$, 且 $x\neq0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)\}$ 是连续的。

其次看第二项。由于 x^3 在实数域 R 上连续，而 $\frac{1}{x^2-1}$ 在其定义域 $\{x|\ x\in R$, 且 $x\neq\pm1\}$ 是连续的。因此根据定理3.1，$\frac{x^3}{x^2-1}$ 在 $R\cap\{x\ |x\in R$, 且 $x\neq\pm1\}=\{x|\ x\in R$, 且 $x\neq\pm1\}$ 上是连续的。

于是，再根据定理3.1，函数 $f(x)$ 在

$\{x\ |x\in R$, 且 $x\neq0$, $x\neq\pm1$, $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)\}$ 上是连续的。

二 反函数的连续性

定理3.2 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上严格递增(或严格递减)，且连续，又 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, 则在区间 $[\alpha, \beta]$（或 $[\beta, \alpha]$）上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, 在区间 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta, \alpha]$）上是严格递增（或严格递减）的，且连续。

证明 仅就函数 $f(x)$ 是严格递增的情形来证明。

由于函数 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上严格递增，且连续，显然，函数的值域也构成一个闭区间$[\alpha, \beta]$（因 $f(x)$在$[a, b]$上严格递增，故 $f(a)=\alpha$ 最小，$f(b)=\beta$ 最大）。再根据定理1.1知，在 $[\alpha, \beta]$ 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且也是严格递增的。下面证明反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$上连续，即对任意 $y_0\in[\alpha, \beta]$，有

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0).$$

事实上，如果 $y_0\in(\alpha, \beta)$，设 $f^{-1}(y_0)=x_0\in(a, b)$。

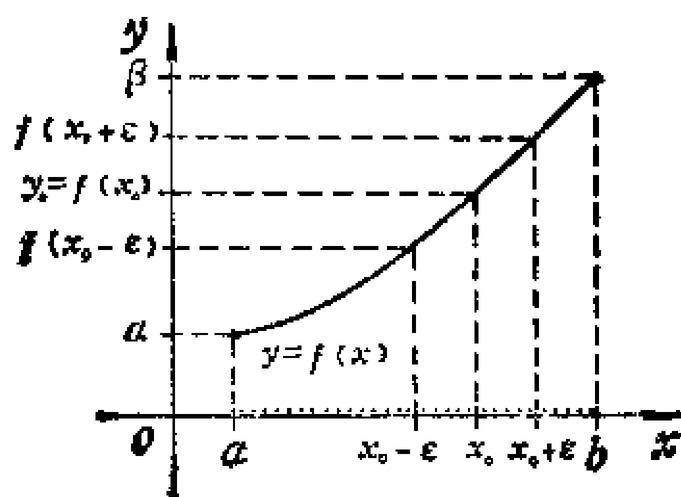


图3.4

对任意给定的 $\varepsilon>0$（要求 $x_0+\varepsilon\in[a, b]$, $x_0-\varepsilon\in[a, b]$），解不等式

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon,$$

即 $$|x-x_0|<\varepsilon,$$

或 $$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon. \tag{1}$$

又因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$上严格递增，由（1）式得

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon)$$

或 $$f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon),$$

当然有

$$f(x_0-\varepsilon)-f(x_0)<y-y_0<f(x_0+\varepsilon)-f(x_0),$$

取 $$\delta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\}>0.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|y-y_0|<\delta$时，

有

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

同理可证，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 α 右连续，点 β左连续。 □

例 3 函数 $y=\sin x$ 在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上严格递增，且连续。根据定理3.2，它的反函数 $y=\arcsin x$ 在区间$[-1,1]$上也严格递增，且连续。同理可得，$y=\arccos x$ 在闭区间$[-1,1]$ 上严格递减，且连续。$y=\operatorname{arctg} x$ 和 $y=\operatorname{arcctg} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调，且连续。因此说反三角函数在它们的定义域内都是连续的。

例 4 函数 $y=x^n$(n为自然数)，当$x\geqslant 0$时函数是严格递增的，且连续。根据定理3.2知，存在反函数 $y=\sqrt[n]{x}$，在区间$[0, +\infty)$上是严格递增，且连续。

三 复合函数的连续性

定理3.3 如果函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，而函数 $u=\varphi(x)$在点x_0连续，且$u_0=\varphi(x_0)$，又复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点x_0 连续。

证明 已知函数$y=f(u)$在点 u_0连续，即，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

又已知函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0连续，即，对上述的$\eta>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|u-u_0|<\eta.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(u)-f(u_0)|=|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|<\varepsilon. \qquad \square$$

例 5 函数 $y=\cos\frac{1}{x^2}$是由 $y=\cos u$，$u=\frac{1}{x^2}$复合而成，

由于函数 $y=\cos u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，函数 $u=\frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续，根据定理3.3知，函数 $y=\cos\frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续。

例 6 证明函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续的。

证明 设任意一点 $x_0\in[0,+\infty)$，由本节例2知，函数 $v=\sqrt{x}$ 在 x_0 点是连续的，并设 $v_0=\sqrt{x_0}$；而且函数 $u=\sin v$ 在点 v_0 是连续的，并设 $u_0=\sin v_0$；及函数 $y=u^2$ 在点 u_0 是连续的。根据定理3.3知，复合函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$ 在点 x_0 是连续的。由于 x_0 的任意性，故知函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是连续的。

§3.4 连续函数的性质

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，依（3.1），就有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在。因此函数极限的性质对连续函数仍然成立，如：

定理3.4 （局部有界性）如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有界。

定理3.5 （局部保号性）如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且有 $f(x_0)>0$（或 $f(x_0)<0$），则在点 x_0 的某个邻域内有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

定理3.5表明：如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)\neq 0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内与 $f(x_0)$ 同号。

在闭区间上的连续函数具有许多重要性质，这些性质是后面研究某些问题的基础。但是，由于这些性质的严格证明需要实数的连续性，故将其证明放到第七章，在此只能列举这些性质，并给予几何说明。

定理3.6（有界性） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连

续，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，即存在 $M>0$，对任意的 $x\in[a, b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

在定理的条件中，强调区间是闭的，这是重要的。否则在开区间上的连续函数不一定有界。例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，虽然在开区间 $(0,1)$ 上连续，但是在区间 $(0,1)$ 上无界（如图3.5）.

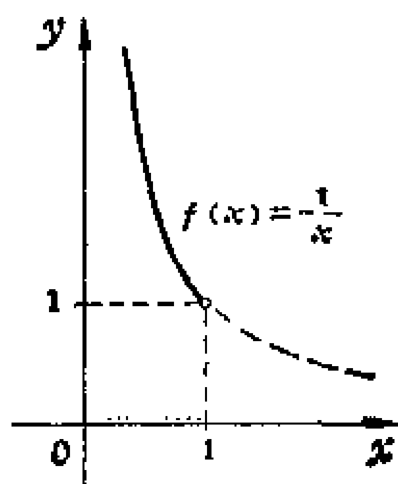


图3.5

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 X 上，如果存在 $x_0\in X$，对于一切 $x\in X$，有

$$f(x_0)\geqslant f(x)\quad (f(x_0)\leqslant f(x)).$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有**最大（小）值**，并称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 X 上的**最大（小）值**，记作 M (m).

定理3.7（最值性） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有最大值 M 和最小值 m，即在闭区间 $[a, b]$ 上存在两点 x_1 与 x_2，使

$$f(x_1)=m,\ f(x_2)=M,$$

对任意的 $x\in[a, b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

其几何意义是：在闭区间 $[a, b]$ 上，函数 $f(x)$ 的连续曲线有最高点 (x_2, M) 和最低点 (x_1, m)（如图3.6）.

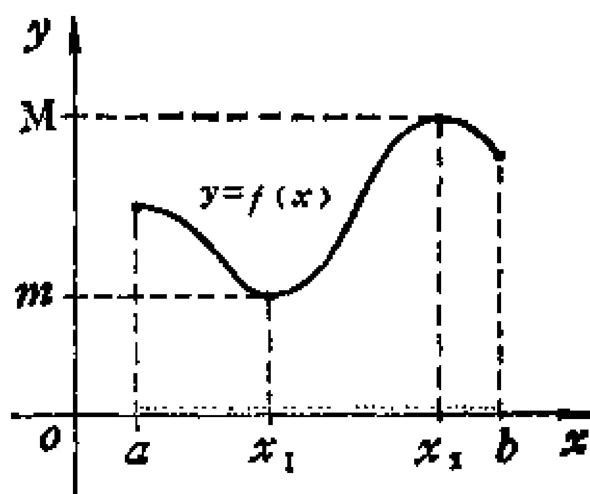


图3.6

在定理条件中强调区间是闭的，这是重要的。否则在开区间上的连续函数不一定存在最大值与最小值。例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(0,2)$ 内取不到最大值和最小值

（如图3.7）.

定理3.8（零点定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c，使得

$$f(c)=0.$$

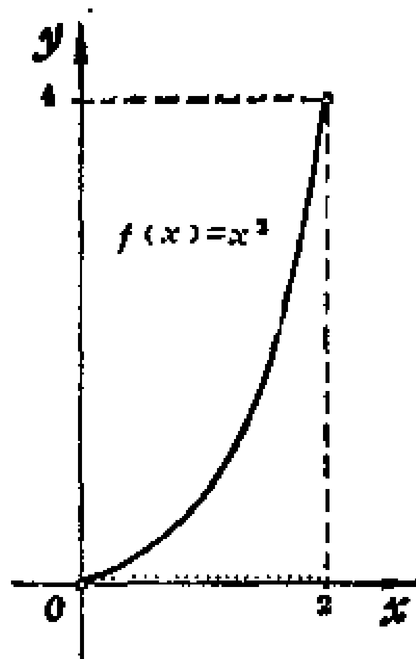


图3.7

定理3.8的几何意义是：如果点 $A(a, f(a))$ 与点 $B(b, f(b))$ 分别在 x 轴的上下两侧，则过点 A 与点 B 的连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点 $(c, 0)$（如图3.8）.

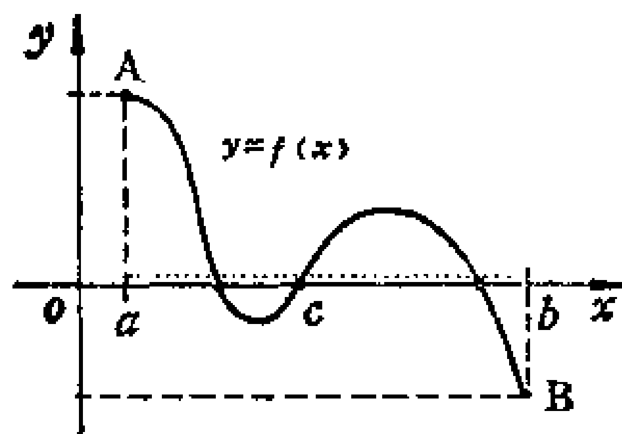


图3.8

定理3.9（介值性） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并设 $f(a)=A$，$f(b)=B$，且 $A\neq B$，则对于 A 与 B 之间任意一个数 l，在 (a, b) 内至少存在一点 c，使得

$$f(c)=l.$$

证明 不妨设 $A>B$，令

$$\varphi(x)=f(x)-l. \qquad (1)$$

显然，函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，由于 $B<l<A$，故有

$\varphi(a)=f(a)-l=A-l>0, \varphi(b)=f(b)-l=B-l<0$。于是，根据定理3.8，在 (a, b) 内至少存在一点 c，使得 $\varphi(c)=0$，由（1）式，有 $f(c)=l$。 □

从定理3.9的证明过程中可以看出，零点定理是介值性定理的特殊情况。

推论 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数的值域也构成一个闭区间。

事实上，由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，根据定理3.7，在 $[a, b]$ 上存在 x_1 和 x_2，使之

$$f(x_1)=m, \quad f(x_2)=M.$$

如图3.6示，不妨认为 $x_1<x_2$，那么在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上函数 $f(x)$ 也是连续的，再根据定理3.9知，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上必取到 m 与 M 之间的一切值，即 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[x_1, x_2]$。于是，函数值在 y 轴上也构成一个闭区间 $[m, M]$。 □

应用介值性定理可以证明某些方程根的存在。

例1 证明超越方程 $x=\cos x$ 在闭区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上至少存在一个实根。

证明 令函数 $f(x)=x-\cos x$。显然，函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是连续的，且有

$$f(0)=-1<0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0,$$

根据零点定理知，在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内至少存在一点 c，使

$$f(c)=c-\cos c=0, \quad 即\ c=\cos c.$$

于是，$x=c$ 就是方程 $x=\cos x$ 的一个根。

例2 证明方程 $x\cdot e^x=2$ 至少有一个小于1的正根。

证明 令函数 $f(x)=2-xe^x$。显然，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都是连续的①。因为要证明存在的根是介于0和1之间

① 其中 e^x 的连续性将在§3.5中给出。

所以我们限于在闭区间$[0,1]$上来讨论，有

$$f(0)=2>0,\ f(1)=2-e\doteq 2-2.71<0.$$

根据零点定理知，在区间$[0,1]$内至少存在一点 c，使

$$f(c)=2-ce^c=0,\ \text{即}ce^c=2.$$

于是，$x=c$ 就是方程 $xe^x=2$ 的介于 0 和 1 之间的正根。

例 3 证明方程 $x^3-8x+5=0$ 有三个实根。

证明 令 $f(x)=x^3-8x+5$。显然，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上都是连续的。由于有

$$f(0)=5,\ f(1)=-2,\ f(3)=8,$$

根据零点定理，因此三次方程在区间$[0,1]$与$[1,3]$内都至少存在一个实根。三次方程有两个根是实根，另一个也必然是实根，于是，方程 $x^3-8x+5=0$ 有三个实根。

§3.5 初等函数的连续性

一 基本初等函数的连续性

以上我们讨论了有理整函数（包括正整数幂函数）、三角函数和反三角函数在它们的定义域上都是连续的。下面将讨论指数函数，对数函数和任意实数幂的幂函数的连续性。

1 指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$的连续性

指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是连续的。

事实上，当 $a>1$ 时，先证函数 a^x 在点 0 是连续的。由§2.1的例 6 知，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$及函数 a^x 是严格递增的。当约定$0<x<\frac{1}{n}$时，有

$$1<a^x<a^{\frac{1}{n}},$$

当 $n\to\infty$ 时，$x\to0+0$，有$a^{\frac{1}{n}}\to1$，从而得

$$\lim_{x\to 0+0} a^x = 1. \tag{1}$$

对函数 a^x 作代换 $x = -y$，则有

$$\lim_{x\to 0-0} a^x = \lim_{y\to 0+0} a^{-y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0+0} a^y} = 1. \tag{2}$$

由（1）和（2）有

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1,$$

以及 $a^0 = 1$，所以a^x 在 0 点是连续的。

其次证对任意一点 $x_0\in(-\infty,\ +\infty)$，$x_0\neq 0$函数 a^x 也是连续的。事实上，因为

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$

以及 $$\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1,$$

所以有

$$\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = 0,$$

即 $$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},$$

因此，a^x 在任意一点x_0连续。

于是，当$a>1$ 时，函数 a^x 在（$-\infty$，$+\infty$）上连续。

当 $0<a<1$时，令 $a=\frac{1}{b}$，$b>1$，且有

$$a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x},$$

因为 b^x 在（$-\infty$, $+\infty$)上连续且不为零，所以当$0<a<1$时，a^x 在（$-\infty$, $+\infty$）上连续。

总之函数$a^x(a>0, a\neq 1)$在其定义域($-\infty$, $+\infty$)上连续。

另外，当 $a>1$时，由于有 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$；当 $0<a<1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$；且函数 a^x 在($-\infty$, $+\infty$）上连续；再根据连续函数的介值定理，故可知指数函数 $y=a^x$ 的值域是$(0,\ +\infty)$。

2　对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$)的连续性

对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上连续。

事实上，由于指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调且连续。根据定理3.2知，对数函数在其定义域 $(0,\ +\infty)$ 上连续。

3　幂函数 $y=x^\alpha$（α为实数）的连续性

幂函数 $y=x^\alpha$（α为实数）在其定义域上是连续的。

由于幂函数的定义域与α有关，但是不论α为何值，幂函数在区间 $(0,\ +\infty)$ 上总是有定义的。下面仅就 $x>0$的情况来讨论，其它情形应象§1.7的第一段那样分别讨论。

因为幂函数 $y=x^\alpha$（α为实数），$x>0$，它可表为

$$y=x^\alpha=e^{\alpha\cdot\ln x},$$

且函数 $y=e^u$在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续，$u=\alpha\cdot\ln x$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上连续。根据定理3.3，所以复合函数

$$y=e^{\alpha\cdot\ln x}=x^\alpha$$

当 $x>0$时连续。

到此为止我们得到：**基本初等函数在其定义域上都是连续的。**

二　初等函数的连续性

因为初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算构成。再由连续函数的四则运算和复合函数的连续性，所以**一切初等函数在其定义区间**（即从定义域中除掉孤立点）**上是连续的**。因此，判断初等函数的连续范围就是求其定义区间。

例1　因为双曲函数都是初等函数，且定义域就是定义区间，所以双曲函数在其定义域上都是连续的，即 $\mathrm{sh}x$，$\mathrm{ch}x$ 和$\mathrm{th}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的，而 $\mathrm{cth}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上是连续的。

例 2　下列函数

$$y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)};\quad y=\sqrt{\sin\sqrt{x}};\quad y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$$

都是初等函数，它们的定义域分别是如下区间：$[1,4]$；$[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$ $(k=0,\ \pm1, \pm2,\ \cdots)$；$[0,\pi]\cup[-4,\ -\pi]$。所以这些函数在它们的定义域上是连续的。

三　函数的连续性在计算极限上的应用

上段的结论是十分重要的，因为初等函数在其定义区间上是连续的，就提供了极限运算的简便方法。**如果 $f(x)$ 是初等函数，且点 x_0 是它的定义区间内的点，那么当 $x\to x_0$时，函数的极限就是当$x=x_0$ 时的函数值，即**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x)=f(x_0). \tag{3.5}$$

作为公式(3.5)的特例，复合函数的连续性（即定理3.3）可以写成：

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(\lim_{x\to x_0}x)]=f[\varphi(x_0)].$$

回顾§2.1的例 8 和§2.4的例 7，由幂函数的连续性，它们可分别写成：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{a},$$

和

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}.$$

根据对数函数的连续性，在第二章例题选讲的例15，可写成：

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln\lim_{n\to\infty}a_n=\ln a\quad(a>0).$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\sin x}$.

解　由于点$\frac{\pi}{2}$属于初等函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\sin x}$的定义区间，因此，根据公式（3.5）有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\sin x}=\frac{\ln(1+\cos\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x)}{\sin\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x}=\frac{\ln 1}{1}=0。$$

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$。

解 当 $x\neq 0$ 时，由于有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x。$$

已知当 $n\to\infty$时，$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\to e$，以及根据幂函数的连续性和公式(3.5)，因此有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

$$=e^x。$$

当 $x=0$ 时，显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1^n=1=e^0。$$

于是，对任意的实数x，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x。$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$。

解 根据对数函数的连续性和公式(3.5)，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e。$$

特别地，当 $a=e$ 时，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1。$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}(a>0)$。

解　令 $y=a^x-1$，根据指数函数的连续性，当 $x\to 0$时，$y\to 0$。同时有 $x=\log_a(1+y)$，应用上例，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

例 7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0)$。

解　根据指数函数的连续性，令$\frac{1}{n}=y$，当 $n\to\infty$ 时，有 $y\to 0$，且$\sqrt[n]{x}-1=x^y-1$，应用上例，有

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{y\to 0}\frac{x^y-1}{y}=\ln x.$$

例 8　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，且$a>0$。则当$x\to x_0$ 时幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限为 a^b。

证明　因为有

$$f(x)^{g(x)}=[e^{\ln f(x)}]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

根据对数函数的连续性，应用公式（3.5）有

$$\lim_{x\to x_0}\ln f(x)=\ln\lim_{x\to x_0}f(x)=\ln a,$$

以及

$$\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)=b\ln a.$$

再根据指数函数的连续性，应用公式（3．5）有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\ln f(x))}=e^{b\ln a}$$
$$=a^b.$$

例 9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\quad(a>0,\ b>0)$。

解　由例 7 知，$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{b}-1)=\ln b$，且有

$$\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$$

$$= \left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}$$

根据例 8 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}$$

$$= e^{\frac{1}{a}\ln b} = b^{\frac{1}{a}}.$$

例10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+2}{3x^3+1}\right)^{x^3}$.

解 由于

$$\left(\frac{3x^3+2}{3x^3+1}\right)^{x^3} = \left[\left(1+\frac{1}{3x^3+1}\right)^{3x^3+1}\right]^{\frac{x^3}{3x^3+1}},$$

且有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x^3+1}\right)^{3x^3+1} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^3+1} = \frac{1}{3}.$$

再根据例 8 的幂指函数求极限公式，故得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+2}{3x^3+1}\right)^{x^3} = e^{\frac{1}{3}}.$$

学 习 指 导

一 内容概要

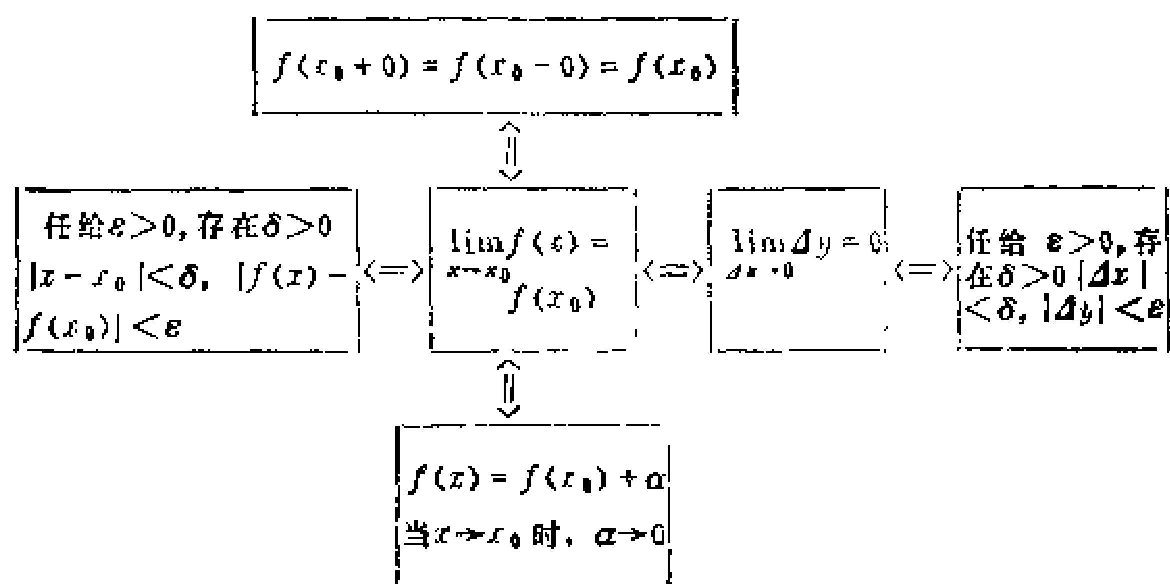
1 重点及要求

在极限概念的基础上，掌握函数在一点连续、间断的定义，及间断点的分类，利用连续的定义会证明函数的连续性。根据连续与间断的定义会判别函数的连续性。

要理解与掌握函数在一点连续及在该点的局部性质（定理3.4、3.5）。在闭区间上连续以及在该区间上的整体性质（定理3.6、3.7、3.8），并注意应用它们。

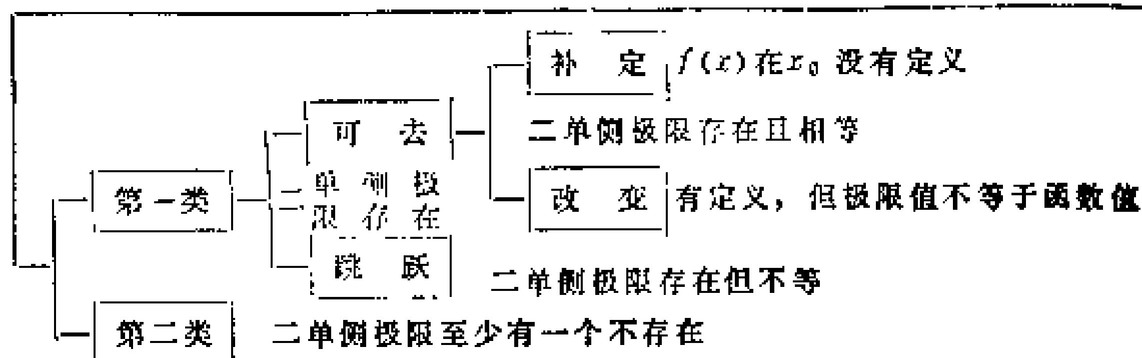
应用初等函数在其定义区间上是连续的和公式（3.5），能较熟练地计算函数的极限。

2 函数 f(x) 在点 x_0 连续定义的六种等价形式

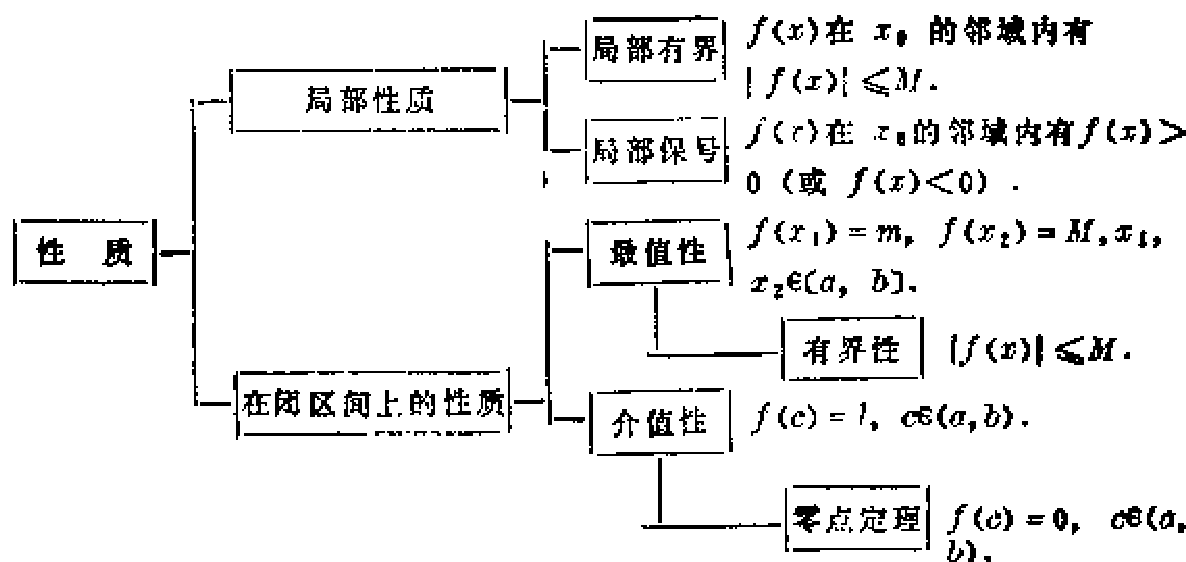


3 间断点及其分类

连续的三条件



4 连续函数的性质



二 几点说明

1 函数在一点连续是个局部性概念

在定义函数 $f(x)$ 的在一点 x_0 连续时，我们只假定了函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 的某个邻域有定义，如满足条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 被叙述成当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限恰是 $f(x_0)$。这就表明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内与 $f(x_0)$ 之间有一种渐变（不是突变）

的关系，且这种关系仅涉及点 x_0 邻域内的函数值。因此说：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续仅仅是个局部性概念。

为了加深理解连续是个局部性概念，下面给出一例，说明确实存在着这样的函数，除了 $x=0$ 点外处处间断。

例如，函数

$$f(x)=xD(x)=\begin{cases}x, & \text{当}x\text{ 是有理数时，}\\ 0, & \text{当}x\text{ 是无理数时。}\end{cases}$$

因为 $f(0)=0$，以及

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}xD(x)=0=f(0)$$

（其中用到了狄利克莱函数 $D(x)$是有界的），所以函数 $xD(x)$ 在点 $x=0$处连续。

但是，当 $x_0\neq 0$时，由于极限 $\lim\limits_{x\to x_0}xD(x)$ 不存在（其证明可参考§3.2的最后一例），因此，对任意一点 $x_0\neq 0$ 都是函数 $xD(x)$的间断点。也就是说，函数 $xD(x)$除了在点$x=0$外处处间断。

2　函数在孤立点上不定义连续性

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，要求函数 $f(x)$ 在包含点 x_0 的邻域内有定义，这是研究函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的基础。因此，如果函数仅在一个孤立点上有定义，我们就不定义函数的连续性。一些特殊的初等函数的定义域可能含有孤立点或完全由孤立点构成。例如，

函数　$y=\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 的定义域是整数集合，即

$$0,\ \pm 1,\pm 2,\ \cdots,\ \pm n,\cdots$$

每个整数在数轴上都是孤立点。

函数　$y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域是

$$|x|\geqslant 1,\ x\leqslant 1 \text{ 与 } x\geqslant 2$$

的公共部分，即$(-\infty,\ -1]\cup\{1\}\cup[2,\ +\infty)$，其中 $x=1$ 是孤立点，如图3.9示。

因此，该函数只能在定义区间 $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$上连续。

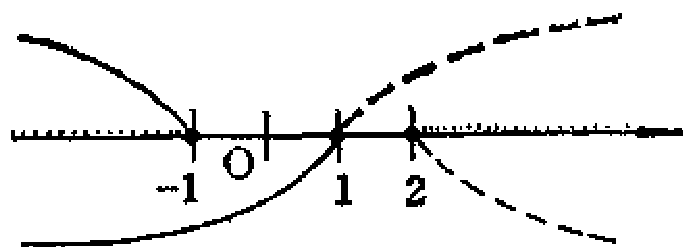


图3.9

三 例题选讲

例1 利用"$\varepsilon—\delta$"语言证明函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$上是连续的。

证明 对任意的 $x_0\in(-\infty,+\infty)$。当 $x_0=0$ 时，对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|\sqrt[3]{x}-0|=\sqrt[3]{|x|}<\varepsilon,$$

解得 $|x|<\varepsilon^3$，取 $\delta_1=\varepsilon^3>0$。于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\varepsilon^3>0$，当 $|x|<\delta_1$ 时，有

$$|\sqrt[3]{x}-0|<\varepsilon.$$

当 $x_0\neq 0$ 时，取x与x_0同号。对任意给定的$\varepsilon>0$，解不等式

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}$$

$$\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x_0^2}}<\varepsilon$$

解得 $|x-x_0|<\varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}$。取$\delta=\varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}>0$。

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$时，有

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|<\varepsilon.$$

又由于 x_0 的任意性，即函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是连续的。

例 2　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 3x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

在闭区间[0,2]上连续.

证明　在开区间(0,1)上，对任意的$x_0\in(0,1)$，有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)=x_0+1=f(x_0)$，所以函数$f(x)=x+1$在(0,1)上连续.

而在开区间(1,2)上，对任意的$x_1\in(1,2)$，有$\lim\limits_{x\to x_1}f(x)=\lim\limits_{x\to x_1}(3x-1)=3x_1-1=f(x_1)$，所以函数$f(x)=3x-1$在(1,2)上连续.

在分点$x=1$，由于有

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2=f(1),$$

和

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(3x-1)=2=f(1),$$

即

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2=f(1),$$

因此函数$f(x)$在点$x=1$连续.

又因为在端点$x=0$和$x=2$分别有

$$\lim_{x\to 0+0}(x+1)=1=f(0),$$

和

$$\lim_{x\to 2-0}(3x-1)=5=f(2),$$

所以函数$f(x)$在点$x=0$右连续，在$x=2$左连续. 于是，函数$f(x)$在[0,2]上连续.

例 3　已知函数$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且$f(x)$在点0是连续的，则函数$f(x)$在任意点a是连续的.

基本思路　利用函数$f(x)$在点a连续的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]=0.$$

证明　对任意点a，由已知条件，有

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f(\Delta x).$$

$$f(0+0)=f(0)=f(0)+f(0)=2f(0).$$

因此，$f(0)=0$. 因为函数 $f(x)$ 在点 0 连续，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[f(a)+f(\Delta x)-f(a)]=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0.$$

于是，函数 $f(x)$ 在任意点 a 连续.

例 4 证明，如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 是连续的，则函数 $\varphi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$ 在点 x_0 也是连续的.

基本思路 利用函数在一点连续的"$\varepsilon—\delta$"语言证明，并注意如下事实：

$$\min\{a-\varepsilon,\ b-\varepsilon\}<A<\min\{a+\varepsilon,\ b+\varepsilon\}$$

就是

$$\min\{a,\ b\}-\varepsilon<A<\min\{a,\ b\}+\varepsilon.$$

证明 因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，即，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

又因为函数 $g(x)$ 在点 x_0 连续，即，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

所以，取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，且当 $|x-x_0|<\delta$ 时，同时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ 和 } |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

即 $$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \text{ 和 } g(x_0)-\varepsilon<g(x)<g(x_0)+\varepsilon.$$

因此有

$$\min\{f(x_0)-\varepsilon,\ g(x_0)-\varepsilon\}<\min\{f(x),\ g(x)\}<\min\{f(x_0)+\varepsilon,\ g(x_0)+\varepsilon\}$$

即 $$\min\{f(x_0),\ g(x_0)\}-\varepsilon<\min\{f(x),\ g(x)\}<\min\{f(x_0),\ g(x_0)\}+\varepsilon,$$

也就是

$$\varphi(x_0)-\varepsilon<\varphi(x)<\varphi(x_0)+\varepsilon$$

或 $$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

例 5 证明，黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{当}x=\dfrac{m}{n}\text{时}, m\text{和}n\text{为互质的整数, 且}n\geqslant 1,\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时},\end{cases}$$

在有理点x不连续；在无理点 x 连续。

基本思路 利用反证法证明函数 $f(x)$ 在任意有理点 $\eta=\frac{m}{n}\neq 0$不连续；利用连续的定义证明函数$f(x)$ 在每一个无理点 ξ 都是连续的，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在邻域 $U(\xi, \delta)$，当 $x\in U(\xi,\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

证明 首先，我们证明函数 $f(x)$在任意一个有理点 $\eta=\frac{m}{n}\neq 0$是不连续的。事实上，由于$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}>0$，和在$\frac{m}{n}$ 的任意一个充分小的邻域内都有无理点存在，且在这些无理点上 $f(x)=0$。假设函数 $f(x)$在点$\eta=\frac{m}{n}$是连续的，根据局部保号性定理，那么在这一点的充分小的邻域内函数 $f(x)$应取正值，这与在这些无理点上 $f(x)=0$相矛盾。

其次，我们证明函数 $f(x)$ 在每一无理点 ξ 都是连续的。事实上，设 n 是一个自然数，因为无理数 ξ 总是含于这样两个有理数之间$\frac{p}{n}<\xi<\frac{p+1}{n}$，所以对于 ξ 存在这样的邻域使之不含形如

$$\cdots -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots \qquad (2)$$

的任意一个有理点。

令 $U_n(\xi, \delta_n)$ 是属于开区间$\left(\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$的邻域，而这个

邻域不含(2)的任意一个数．即不含任意一个以 n 为分母的分数．

取一个自然数 n_0，使之满足$\frac{1}{n_0}<\varepsilon$．对于邻域

$$U_1(\xi,\ \delta_1),\ U_2(\xi,\ \delta_2),\ \cdots,\ U_{n_0}(\xi,\ \delta_{n_0})$$

分别不含以 1，2，3，…，n_0 为分母的分数．

若 $U(\xi,\ \delta)$是一个属于 $U_1(\xi,\delta_1)$，$U_2(\xi,\ \delta_2),\cdots,U_{n_0}(\xi,\ \delta_{n_0})$的邻域，那么 $U(\xi,\ \delta)$内当然不含以 1，2，3，…，n_0为分母的分数．因此含于 $U(\xi,\ \delta)$ 内的有理数 $x=\frac{m}{n}$的分母 $n>n_0$，从而有$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$，亦即

$$|f(x)-f(\xi)|=f(x)=\frac{1}{n}<\varepsilon\quad (f(\xi)=0).$$

当x是无理数时，有 $f(x)=0$．于是邻域 $U(\xi,\ \delta)$ 内的任意一点都有

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

例 6　判别函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ -x, & |x|>1,\end{cases}$$

的连续性，并指出间断点的类别．

基本思路　利用 $f(x)$在点 x_0 连续的充要条件

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

解　当 $|x|<1$ 时，即在区间$(-1,\ 1)$ 上，函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$是连续的；当 $|x|>1$ 时，即在区间 $(-\infty,\ -1)$ 与$(1,\ +\infty)$上，函数 $f(x)=-x$ 也是连续的．

又因为有

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(-x)=-1 与 \lim_{x\to 1-0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\sin\frac{\pi x}{2}=1;$$

和

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}\sin\frac{\pi x}{2}=-1 \text{与} \lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}(-x)$$

$$=1.$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=\pm 1$ 都是间断点，且都是第一类的间断点。

例 7 指出下列函数的间断点及其类别。

（1）$y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$；（2）$y=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，$x>0$；

（3）$y=x[x]$。

解 （1） 函数在 $x=0$，$x=1$ 没有定义，而在其它各点函数均连续。所以只研究点 0 和 1 即可。由于

$$\lim_{x\to 0+0}y=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=-\infty$$

而
$$\lim_{x\to 0-0}y=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=+\infty,$$

故函数在点 $x=0$ 处为第二类的间断点。

又因为

$$\lim_{x\to 1+0}y=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1,$$

而
$$\lim_{x\to 1-0}y=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0.$$

所以函数在 $x=1$ 处为第一类间断点。

（2）见图1.34。因为有

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}y=\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1,\quad n=1,\ 2,3,\ \cdots,$$

而
$$\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}y=\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

所以函数 $y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，当 $x>0$时，在点 $x=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$为第一类间断点。

（3）由图1.7知，$x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数〔$x$〕的间断点；不难证明，$x=k$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 也是函数 $f(x)=x[x]$的间断点。因为

$$\lim_{x\to k+0}f(x)=\lim_{x\to k+0}x[x]=k^2,\quad(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

而
$$\lim_{x\to k-0}f(x)=\lim_{x\to k-0}x[x]=k(k-1),\ (k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

所以函数 $f(x)=x[x]$在 $x=k$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 为第一类间断点。

虽然点 $x=0$是函数〔x〕的间断点，但是在 $x\to0$ 的过程中函数〔x〕有界，从而有

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x[x]=0=f(0),$$

故函数 $f(x)=x[x]$在 $x=0$ 处连续。

于是函数 $f(x)=x[x]$ 仅在 $x=k(k=\pm1,\ \pm2\cdots)$ 处是第一类的间断点。

例8 研究下列函数的连续性。

（1）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}(x\geqslant0)$；（2）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解 （1）当$0\leqslant x<1$ 时，有

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=1;$$

当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$；

当 $x>1$ 时，有

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=0.$$

故$x=1$ 为函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$的第一类间断点。

（2）当 $|x|\leqslant1$ 时，有

$$1 \leqslant 1 + x^{2n} \leqslant 2 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故 $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = 1;$$

当 $|x| > 1$ 时，有

$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = x^2 \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{-2n}} = x^2,$$

且有 $y(1) = 1$.

于是，函数为处处连续.

例 9　选取适当的参数 a 和 b，使之下列函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

（1）$f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{a(n^x - n^{-x})}{n^x + n^{-x}}$;

（2）$f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$.

基本思路　利用

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

建立以 a（或 a 与 b）为未知数的方程式（或组）. 再求 a（或 a, b）.

解（1）因为当 $x > 0$ 时，有

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a(n^x - n^{-x})}{n^x + n^{-x}} = a,$$

当 $x < 0$ 时，有

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a(n^x - n^{-x})}{n^x + n^{-x}} = -a,$$

当 $x = 0$ 时，有

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a(n^x - n^{-x})}{n^x + n^{-x}} = 0,$$

所以有

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} a, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -a, & x < 0. \end{cases}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-a$，和 $f(0)=0$；要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续就可以了，所以令

$$a=-a=0,$$

当 $a=0$ 时，即函数 $f(x)\equiv 0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

（2）当 $|x|<1$ 时，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx,$$

无论 a 和 b 为何值，函数 $f(x)=ax^2+bx$ 在 $(-1,1)$ 上连续。

当 $|x|>1$ 时，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\frac{1}{x},$$

显然在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上连续。

在点 $x=1$ 处，有

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(ax^2+bx)=a+b,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1,$$

以及 $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+b}{2}=\dfrac{1+a+b}{2}$.

在点 $x=-1$ 处，有

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(ax^2+bx)=a-b,$$

以及 $f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+a-b}{2}=\dfrac{-1+a-b}{2}$.

要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)$ 必须在点 $x=\pm 1$ 的左右极限及在 $x=\pm 1$ 的函数值满足方程

$$a+b=\frac{1+a+b}{2}=1$$

和 $$a-b=\frac{-1+a-b}{2}=-1,$$

由此解得 $a=0$, $b=1$.

于是，当 $a=0$, $b=1$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

例10 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的跳跃间断点.

基本思路 利用左右极限存在但不相等，即

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

证明 不妨设函数 $f(x)$ 为递增的，x_0 为 $f(x)$ 的不连续点，且 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值.

在 x_0 的左侧研究函数 $f(x)$，由于函数 $f(x)$ 是递增的、有界的，即 $f(x)\leqslant f(x_0)$，当 $x\to x_0-0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在，有

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\leqslant f(x_0).$$

同理可证

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\geqslant f(x_0).$$

于是有

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant\lim_{x\to x_0+0} f(x). \qquad (3)$$

我们说（3）式中的两个等号不能同时成立，否则函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，与假设矛盾. 故得

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)<\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

即单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的跳跃间断点.

例11 如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a, b) 上连续，且当 x 为有理点时有 $f(x)=g(x)$，则在 (a, b) 上有 $f(x)\equiv g(x)$.

基本思路 只须证明，对任意无理点 $x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)=g(x_0)$ 即可.

证明 任取无理点 $x_0\in(a, b)$，任取收敛于 $x_0\in(a, b)$ 的有理点列 $\{x_n\}$，根据归结原则及 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 连续，故

有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),\ \lim_{n\to\infty} g(x_n)=g(x_0).$$

又因为 $\{x_n\}$为有理点列，所以有 $f(x_n)=g(x_n)$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)=g(x_0)=\lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

于是有

$$f(x)\equiv g(x),\ x\in(a,\ b).$$

例12 证明，对任意 $a<b$，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-a}, & x\neq a,\\ 0, & x=a,\end{cases}$$

在闭区间 $[a,\ b]$上能取得介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切中间值，但在 $[a,\ b]$上函数 $f(x)$不连续。

基本思路 根据介值性定理和函数本身的特点，构造一个包含在 $[a,\ b]$内的闭区间 $[a_1,\ b_1]$，使之 $f(a_1)=-1$, $f(b_1)=1$.

证明 已知 $f(a)=0$, $f(b)=\sin\dfrac{1}{b-a}$，且$|f(b)|\leqslant1$，故只须证明 $f(x)$可取得介于-1与1之间的一切值即可.

又因为 $a<b$, $\left|\sin\dfrac{1}{x-a}\right|\leqslant1$，和当$x\to a+0$时，$\sin\dfrac{1}{x-a}$在$-1$与1之间摆动，故必存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，使

$$a<a+\frac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}<a+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}<b,$$

且有

$$f\left(a+\frac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}\right)=-1,\ f\left(a+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)=1.$$

由题设函数 $f(x)$ 在闭区间$\left[a+\dfrac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi},\ a+\right.$

$\left.\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]\subset[a,b]$上连续，根据定理3.6，故知函数$f(x)$可取得$-1$与1之间的一切值。

但是，由于$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\sin\frac{1}{x-a}$不存在，所以函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上不连续。

例13　证明，如果函数$f(x)$在区间(a,b)内连续，且a_1，a_2，…，a_n为此区间中的任意n个不同的点，则在它们之间至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)].$$

基本思路　在闭区间$[a_i,a_j]\subset(a,b)$上应用介值性定理和最值性定理。

证明　设

$$a_i=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\quad a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

由于，a_1，a_2，…，$a_n\in(a,b)$，且$a_i<a_j$。因此$[a_i,a_j]\subset(a,b)$，且函数$f(x)$在$[a_i,a_j]$上连续，根据最值性定理3.7，故必存在ξ_1，$\xi_2\in[a_i,a_j]$，使之

$$f(\xi_1)=m\ (\text{最小值})\quad f(\xi_2)=M\ (\text{最大值}),$$

且有

$$m\leqslant f(a_k)\leqslant M\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

将这n个不等式相加，得

$$n\cdot m\leqslant f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\leqslant n\cdot M,$$

即

$$m\leqslant\frac{1}{n}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)]\leqslant M.$$

如果令

$$C=\frac{1}{n}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)],$$

则C是介于最小值m与最大值M之间的一个数，根据定理3.9，至少存在一点$\xi\in[a_i,a_j]$，使$f(\xi)=C$，

于是，

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)].$$

例14　已知函数 $\varphi(x)$在区间 $(-\infty,+\infty)$上连续，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n}. \qquad (4)$$

（1）证明，如果 n是奇数，则存在一个数 ξ，使之 $\xi^n+\varphi(\xi)=0$。

（2）证明，如果 n 是偶数，则存在一个数 η，使之 $\eta^n+\varphi(\eta)\leqslant x^n+\varphi(x)$（对一切 x）。

基本思路　根据已知条件，从区间 $(-\infty,+\infty)$ 里构造一个闭区间 $[-X, X]$ $(X>0)$，在闭区间 $[-X, X]$ 上应用零点定理和最值性定理。

证明　（1）令

$$f(x)=x^n+\varphi(x)$$

因为 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上也连续。

由于 n 是奇数，和(4)式，则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^n\left[1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right]=+\infty,$$

和
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^n\left[1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right]=-\infty.$$

故必存在 $X>0$，使之

$$f(X)>0,\ f(-X)<0.$$

于是，在区间 $[-X, X]$ 上应用定理3.8，必存在一点 $\xi\in[-X, X]$，使之

$$f(\xi)=\xi^n+\varphi(\xi)=0.$$

（2）令 $f(x)=x^n+\varphi(x)$，由于 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续，因此 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上也连续。

因为 n 是偶数，由(4)式，有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^n\left[1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right]=+\infty,$$

即对任意给定的 $M>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)|=f(x)>M. \qquad (5)$$

在闭区间 $[-X, X]$ 上应用最值性定理3.7，必存在一点 η，使之 $f(\eta)$ 是最小值. 由（5）式，对任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$，有

$$f(\eta)=\eta^n+\varphi(\eta)\leqslant x^n+\varphi(x).$$

例15 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且值域也是 $[a,b]$，则在 $[a,b]$ 上存在一点 x_0（不动点），使之

$$f(x_0)=x_0.$$

基本思路 在 $[a,b]$ 上应用最值性定理和零点定理.

证明 由于函数 $f(x)$ 的值域是 $[a,b]$，所以 a 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，b 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

如果 $f(a)=a$，或 $f(b)=b$，则 $x_0=a$，或 $x_0=b$，证完.

如果 $a<f(a)$ 与 $f(b)<b$，则令

$$\varphi(x)=f(x)-x.$$

显然函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且有

$$\varphi(a)=f(a)-a>0 \text{ 和 } \varphi(b)=f(b)-b<0.$$

根据零点定理3.8，故存在 $x_0\in(a,b)$，使之

$$\varphi(x_0)=0, \text{ 即 } f(x_0)=x_0.$$

于是，存在 $x_0\in[a,b]$，使之 $f(x_0)=x_0$.

例16 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$；（4）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$；

（5）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}(a>0)$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

解 （1）令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$y\to 0$. 则有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{\cos y}{\sin y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\left[1+(\cos y-1)\right]^{\frac{1}{\cos y-1}}\right\}^{\frac{\cos y-1}{\sin y}\cdot\cos y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\left[1+(\cos y-1)\right]^{\frac{1}{\cos y-1}}\right\}^{\frac{-\frac{y^2}{2}}{y}\cdot\cos y}=e^0=1$$

$\left(\text{因为 }\sin y\sim y,\ 1-\cos y\sim\dfrac{y^2}{2}\right)$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)}}\right\}^{\frac{2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{x^2+1}{x+1}}$$

根据§3.5的例 6 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}=\ln e=1.$$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^2.$$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}\cdot e^x\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{\ln[1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)]}\cdot\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}\right\}$$

根据§3.5的例 5 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{\ln[1+(x+\sqrt{1+x^2}-1]}=1,$$

以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot[(x-1)-\sqrt{1+x^2}]}{[(x-1)+\sqrt{1+x^2}][(x-1)-\sqrt{1+x^2}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+1-x}{2}=1.$$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=1.$$

（4） $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}$，

其中

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0}a^a\frac{a^y-1}{y}$$

$$=a^a\ln a;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(\frac{x}{a}\right)^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a[(e^{\ln\frac{x}{a}})^a-1]}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^a(e^{a\ln\frac{x}{a}}-1)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a(\ln x-\ln a)}{x-a},$$

以及 $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)$ （令 $x=a+y$）

$$=\lim_{y\to 0}\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{y}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

所以有

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\cdot\ln a-a^a=a^a(\ln a-1).$$

(5) $$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(\frac{x^x}{a^a}-1\right)}{x-a}$$

$$=a^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}.$$

如令 $x\ln x-a\ln a=u$，当 $x\to a$时， $u\to 0$，根据§3.5例6，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}=\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1,$$

以及

$$\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-x\ln a+x\ln a-a\ln a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x(\ln x-\ln a)}{x-a}+\ln a$$

$$=1+\ln a.$$

所以有

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a(1+\ln a).$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left[\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\right]\cdot\sin\left[\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x\operatorname{sh}x)\cdot\sin(x\operatorname{ch}x)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x\operatorname{sh}x)}{x\operatorname{sh}x}\cdot\frac{\sin(x\operatorname{ch}x)}{x\operatorname{ch}x}\cdot\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x}{x}\right],$$

其中 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\operatorname{sh}x)}{x\operatorname{sh}x}=1$； $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\operatorname{ch}x)}{x\operatorname{ch}x}=1$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+1-e^{-2x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{2x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[1+1]$$

$$=1.$$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}=-2.$$

习　　题

§3.1

1．证明函数

$$y=f(x)=3x+1$$

在点 $x=2$ 连续．

2．利用“ε—δ”语言证明下列函数在指定的区间上（或指定的点）是连续的

（1）$f(x)=\cos x$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上；

（2）$f(x)=x^2$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上；

（3）$f(x)=|x-2|$，点 $x=2$ 处．

3．处判断下列函数在指定点的连续性：

（1）$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1,\end{cases}$ 在 $x=1$；

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^3+2x^2+x}{\sin x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，在 $x=1$ 及 $x=2$．

4．常数 a 取何值时，函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x<0,\\ a-x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续？

5. 证明，如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的，则函数 $\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 是连续的。

§3.2

6. 指出下列函数的间断点及其类别。如果是可去间断点，则在该点补充函数定义或改变函数值，使之连续。

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$；（2）$f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}4x}{2x}$，$f(0)=1$；

（3）$f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$；（4）$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$；

（5）$f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$；（6）$f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]$；

（7）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0;\end{cases}$ （8）$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 2(x-1), & x\geqslant 2.\end{cases}$

7. 研究下列函数的连续性：

（1）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$；（2）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$。

§3.3

8. 证明，如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 连续。

9. 证明，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)<0$，则在 x_0 的某个邻域内有 $f(x)<0$。

10. 证明，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在极限，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界。

11. 证明，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上除了有限个第一类间断点处处连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

12. 证明，方程 $x=a\sin x+b$，其中的 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，且不超过 $a+b$。

13. 证明，任何一个奇次多项式至少存在一个实根。

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，又有 $f(0)=f(1)=0$，则对任意一个实数 $l(0<l<1)$，必存在实数 $x_0\in[0,1)$，使之 $f(x_0)=f(x_0+l)$。

§3.4

15. 如果函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 之一或两者在点 x_0 处不连续，那么它们的代数和在点 x_0 是否也不连续？举出适当的例子。

16. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{当 } -3\leqslant x<0 \text{ 时},\\ -\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 3 \text{ 时},\end{cases}$$

的连续性。

17. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } 0<x<2 \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$$

在 $x=0$ 及 $x=1$ 的连续性。

18. 如果 $f(x)$ 是连续的，利用复合函数的连续性证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 也是连续的。

§3.5

19. 研究函数 $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$ 的连续性。

20. 利用函数的连续性求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $x>0$；

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $a>0$，$b>0$；

（9）$\lim\limits_{x\to2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$；

（10）$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x2$。

第四章　导数与微分

在前三章里，我们研究了变量与变量之间的依赖关系（即函数）和变量变化的趋势（即极限）．这就为我们研究数学分析主要内容奠定了基础．实践表明，研究变量变化的快慢（即速度）也是不可缺少的．例如，各种运载工具的运动速度的大小是它们工作性能好坏的重要标志之一．本章将要研究的导数概念就是变量变化的速度在数学上的一种抽象．另外，我们还要研究与导数概念紧密相关的微分概念．

§4.1　问题的提出

一　瞬时速度

人们在日常工作和生活中，对物体"运动速度"都有一定的了解，但是这种了解往往仅限于常识性的．例如，一个人步行 8 小时共行走了36公里，他的时速为4.5公里；火车运行 8 小时共行驶了480公里，它的时速为60公里等等．实际上这些都是指的运动物体在一段时间内的平均速度．然而，大量的实际问题表明，仅仅知道运动物体的平均速度是不够的，还要知道运动物体在某一时刻的瞬时速度．

设某运动物体的运动规律是

$$S=f(t).$$

当时间从t_0变到t时，在$\Delta t=t-t_0$这段时间内，物体运动的路程为

$$\Delta S=f(t)-f(t_0).$$

于是，在$\Delta t=t-t_0$时间内物体的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

所说的平均速度就是在单位时间内所通过的路程。因此，不论把Δt取得多么小，只要是个定数，那么$\frac{\Delta S}{\Delta t}$总是平均速度。很显然，要使平均速度越来越接近$t_0$时刻的“瞬时速度”，以至转化为在时刻$t_0$的瞬时速度，就要依靠极限这个工具来实现。

如果在Δt时间内的平均速度的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{4.1}$$

存在，则称其极限为运动物体（规律$S=f(t)$）在时刻t_0时的**瞬时速度**，记作$v(t_0)$。

定义瞬时速度的过程也就给出了计算瞬时速度的方法。例如，自由落体的运动规律是

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

求落体在$t=t_0$（$t_0>0$）时的瞬时速度。

由于

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0),$$

因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0,$$

这就是自由落体在时刻t_0时的瞬时速度。

二　曲线的切线斜率

当质点在做曲线运动时，不仅在速度上有变化，并且在运动方面上也有变化（所谓质点的运动方向就是质点沿曲线的切线方向）。因此，从数量的角度看，就是求曲线上某一定点的

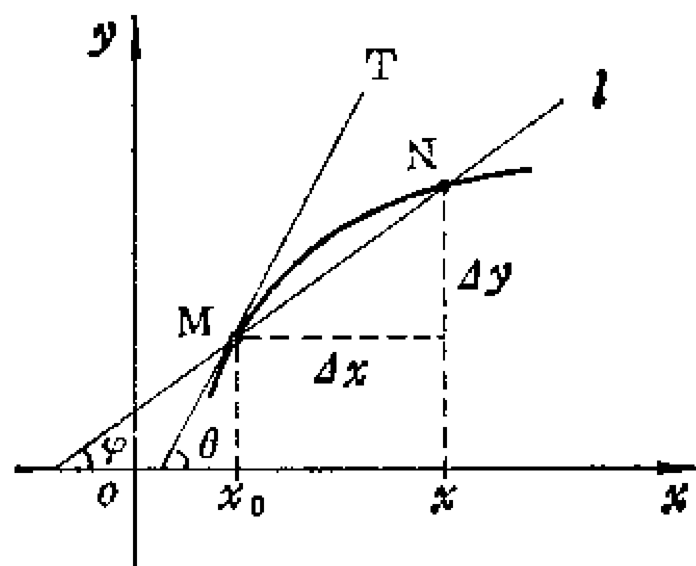


图4.1

切线斜率。

设曲线 l 的方程为

$$y=f(x),$$

且 $M(x_0, y_0)$ 是曲线l上的一点，求过点M的切线斜率。

在曲线l上另取一点N，设它的横坐标为x，那么它的纵坐标就是 $f(x)$，并做割线MN。设割线与x轴的交角为φ。于是，割线的斜率（如图4.1）为

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4.2}$$

与平均速度类似，不论 Δx 多么小，只要它是个定数，$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$总是过点$M$曲线 l 的割线MN的斜率。不难看到，当动点N沿曲线l无限地趋近于点M时，即当$x\to x_0$时，割线MN的极限位置就是曲线l过点M的切线 T。于是割线斜率的极限就是切线 T 的斜率。

当$x\to x_0$时，即$\Delta x\to 0$。如果（4.2）式的极限存在，设

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

则称k为曲线l在点M的切线斜率。

如果(4.2)式的极限不确定，称曲线l在点x_0不存在切线。

§ 4.2 导数的定义

上述二例，虽然分属于不同的学科，一个是力学问题，另一个是几何问题，但是从数量关系来说，它们却有同样的数学形式——函数改变量与自变量改变量之比的极限.

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，在此邻域内任取一点 $x\,(x\neq x_0)$. 有自变量的改变量 $\Delta x=x-x_0$ 与函数的改变量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，其极限叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数（或微商），记作 $f'(x_0)$ 或 $\frac{df(x_0)}{dx}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4.3}$$

定义 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

显然，如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，则导数 $f'(x)$ 是开区间 (a,b) 内的函数，常将 $y'=f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数.

从导函数的角度看，符号 $f'(x_0)$ 仅仅表示导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 时的值.

由导数的定义，不难把§4.1中所讨论的力学和几何问题分别叙述如下：

瞬时速度 $v(t)$ 是运动物体所经过的路程函数 $S=f(t)$ 关于时间 t 的导数，即 $v(t)=f'(t)$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 的切线斜率 $\operatorname{tg}\theta$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 关于横坐标 x 的导数，即 $\operatorname{tg}\theta=f'(x)$. 换句话说，函数 $y=f(x)$ 在点 x 的导数的几何意义是曲线上过点 (x,y) 的

切线斜率。

函数的导数是一个局部性的概念。在本质上，$f'(x_0)$ 揭示了函数 $f(x)$ 在点 x_0 相对于自变量 x 的变化率。在数值上，$f'(x_0)$的大小反映了函数 $f(x)$在点x_0附近变化的快慢；在符号上，$f'(x_0)$的正负反映了函数$f(x)$在点x_0附近变化的增减性。对导数有了这样的认识，有助于把它作为微分学中的重要工具，广泛地应用到各种实际问题中去。例如，电流强度、电场强度、密度、物体的比热、化学反应速度和有机体的生长速度等等，在数学上都可以归结为函数的导数问题。

函数的可导与连续有如下关系：

定理4.1 如果函数 $f(x)$在点x_0可导，则函数 $f(x)$ 在点x_0连续。

证明 因为函数 $f(x)$在点x_0可导，从而等式

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

成立，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

或 $$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0),$$

即函数 $f(x)$在点x_0连续。 □

定理4.1表明：**可导必连续**。然而，这个定理的逆定理却不成立。例如，函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & \text{当}x\geqslant 0\text{时},\\ -x, & \text{当}x<0\text{时},\end{cases}$$

在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是处处连续的，但是它在点 $x=0$却不存在导数，（如图4.2(a)）。事实上，由于

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1,$$

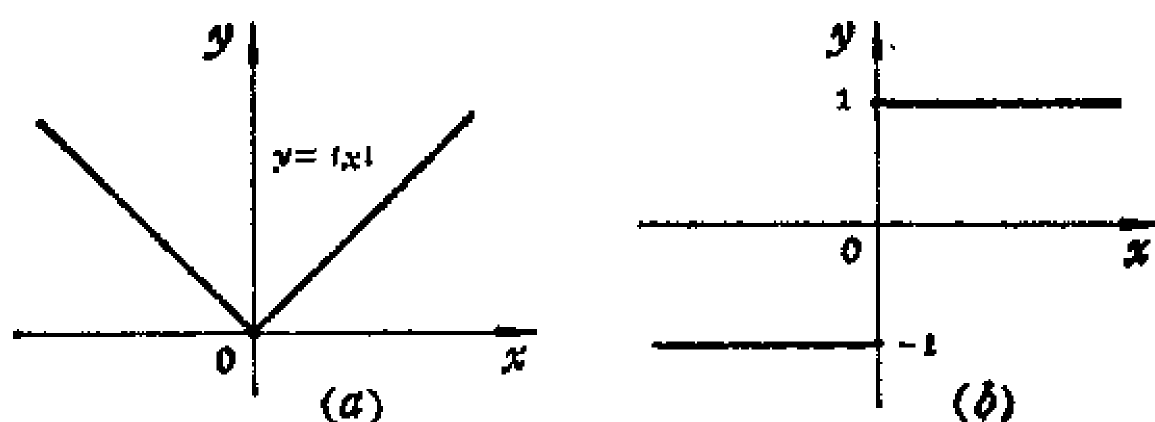


图4.2

而 $$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

这表明函数$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$的左、右极限存在但不相等，所以当$x\to 0$时，极限不存在，故函数 $f(x)$在点$x=0$处不存在导数。

在此例中我们又发现，函数 $f(x)=|x|$ 的导数为

$$f'(x)=\begin{cases}1, & 当x>0时,\\ -1, & 当x<0时,\end{cases}$$

如图4.2(b)示，这表明导函数$f(x)$的定义域较原来的函数$f(x)$的定义域缩小了，即从$(-\infty,+\infty)$里除去$x=0$的点。

§ 4.3 求导数举例

在上一节里，我们不仅给出函数 $y=f(x)$在一点 x 的导数定义，同时也给出了求函数导数的方法，即

（1）在点x处给出改变量Δx，并计算在点$x+\Delta x$ 的函数值；$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$；

（2）从 $f(x+\Delta x)$中减去 $f(x)$，得函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（3）将函数的改变量 Δy 除以自变量的改变量Δx，得

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

（4）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，如果这个极限存在，则其极限就是所求的导数。

下面，按其上述步骤求几个基本初等函数的导数。

例1　求函数 $y=c$（c是常数）的导数。

解　因为函数是常数，所以不论Δx如何选取，$\Delta y=c-c=0$，于是当$\Delta x\neq 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$，从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

故有

$$y'=(c)'=0。$$

例1表明：**常数的导数等于零。**

例2　求幂函数 $y=x^n$（其中n是正整数）的导数。

解（1）在点x处对自变量给出改变量Δx，在点$x+\Delta x$的函数值为

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots\cdots+(\Delta x)^n;$$

（2）$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots\cdots+(\Delta x)^n;$$

（3）当$\Delta x\neq 0$时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots\cdots+(\Delta x)^{n-1};$$

（4）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，由于上式右端除了第一项外每一项都含有因子$\Delta x$，因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，这些项都趋向于零。

从而有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

例 3　求 $y = \sqrt{x}$ $(x>0)$的导数。

解 (1) $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$ (要求 $x + \Delta x \geqslant 0$);

(2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

(4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

在第四步取极限的过程中，应用了函数$\sqrt{x}$的连续性。从而有

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例 4　求 $y = \sin x$的导数。

解 (1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

(2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$;

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

(4) 根据函数$\cos x$的连续性，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

以及 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1,$$

从而有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

同样可得 $$(\cos x)'=-\sin x.$$

例 5 求对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1; x>0$）的导数。

解 （1）$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$ （要求$x+\Delta x>0$）;

(2) $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$;

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

(4) 由对数函数的连续性，以及对数的换底公式，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

从而有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，如果对数的底a等于数e，则有

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

§4.4 求导法则

在上一节里，应用导数定义求出了几个基本初等函数的导数．应用导数定义求函数的导数是最基本的方法，但是求复杂函数的导数就要进行大量繁琐的计算．人们根据初等函数的构造，总结一整套简便易行的求导法则．

一 导数的四则运算

定理4.2 如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点x可导，则函数 $y=u\pm v$①在点x也可导，且有

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

证明 在点x给自变量的改变量Δx，函数u，v，y依次得到改变量 Δu，Δv，Δy，且有

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v),$$

由此可得

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

因为函数 $u(x)$，$v(x)$在点x可导，所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'.$$

即函数 $y=u\pm v$ 在点x可导，且有

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'. \qquad \square$$

定理4.2表明：**代数和的导数等于导数的代数和．**

用数学归纳法不难把定理推广到有限个函数代数和的情形：

---

① 为了书写简便，常把函数$u(x)$，$v(x)$写成u，v．

$$(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \cdots \pm u_n'.$$

定理4.3 如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点x可导，则函数 $y = u \cdot v$在点x也可导，且有

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + v'u.$$

证明 在点x给自变量的改变量Δx，函数u，v，y依次取得改变量Δu，Δv，Δy。有

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \Delta v,$$

以及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

因为函数u在点x可导，由定理4.1知，函数u在点x就连续，即当$\Delta x \to 0$时，$\Delta u \to 0$；另外，当 $\Delta x \to 0$ 时，这里的u和v都是常数。于是有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u'v + v'u + 0 \cdot v'$$

$$= u'v + v'u,$$

即函数 $y = uv$可导，且

$$y' = (uv)' = u'v + v'u.$$ □

如果 $y = uvw$，并且 u，v，w在点x都可导，则

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

不难用数学归纳法把这个运算法则推广到有限个函数相乘的情形（$n \geqslant 2$）：

$$(u_1 u_2 \cdots\cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'.$$

推论 如果函数$u(x)$在点x可导，则 $y = cu(x)$（c是常数）在点x也可导，并且 $y' = cu'(x)$。

推论的证明是容易的，只须注意常数的导数等于零和定理4.3就可以了。

推论表明：**常数因子可以挪到导数符号外面来。**

定理4.4 如果$u(x)$，$v(x)$在点x可导，且$v(x)\neq 0$，则$y=\frac{u}{v}$在点x可导，且有

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

证明 由于

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{\Delta u\cdot v-\Delta v\cdot u}{v(v+\Delta v)},$$

因此有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-\frac{\Delta v}{\Delta x}u}{v(v+\Delta v)}.$$

因为u，v是x的函数，所以当$\Delta x\to 0$时，u，v应当看作常数；由于v的连续性，当$\Delta x\to 0$时，就有$\Delta v\to 0$。于是，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-\frac{\Delta v}{\Delta x}u}{v(v+\Delta v)}=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

即$y=\frac{u}{v}$在点x可导，且有

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$ □

例1 求多项式$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$的导数。

解 由定理4.2、定理4.3的推论和幂函数的求导公式，就有

$$\begin{aligned}y'&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)'\\&=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'\\&=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.\end{aligned}$$

例2 求函数$y=\sqrt{x}\sin x$的导数。

解 根据函数乘积的求导法则，就得

$$y' = (\sqrt{x})'\sin x + \sqrt{x}(\sin x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x.$$

例 3　求正切函数 $y = \mathrm{tg}x$ 的导数

解　根据商的求导法则，有

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同样可求

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

二　反函数的求导法则

为了求指数函数和反三角函数的导数，这里首先研究反函数的求导法则。

定理4.5　如果函数 $x = \varphi(y)$ 满足条件：

（1）在某一区间内严格单调，且连续；

（2）在区间内某一点 y 函数存在导数 $\varphi'(y)$，且 $\varphi'(y) \neq 0$；

则函数 $x = \varphi(y)$ 的反函数 $y = f(x)$ 在点 $x(x = \varphi(y))$ 可导，且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

定理 4.5 表明：**反函数的导数等于原来函数的导数的倒数。**

证明　由条件（1）知，在对应的区间内函数 $x = \varphi(y)$ 存在反函数 $y = f(x)$，而且它也是严格单调的和连续的。给 x 一个改变量 Δx，且 $\Delta x \neq 0$，由于 $f(x)$ 的严格单调性，就有

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0.$$

另外，又根据 $f(x)$ 的连续性，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$。

现在对等式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (\Delta x\neq 0,\ \Delta y\neq 0)$$

两边取极限，故得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

这不仅证明了反函数 $y=f(x)$ 在点x可导，而且给出了

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \square$$

有时为了明确指出对那个变量的导数，常用下标标明，即

$$y_x'=\frac{1}{x'_y}.$$

例 4 求指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$的导数。

解 因为指数函数 $y=a^x$是对数函数 $x=\log_a y$的反函数。函数 $x=\log_a y$在区间$0<y<+\infty$ 内严格单调，连续和可导，根据定理4.5知，函数 $y=a^x$可导，且有

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

因此 $$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，当$a=e$时，有 $(e^x)'=e^x$。

例 5 求反正弦函数 $y=\arcsin x$的导数。

解 因为函数 $x=\sin y$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内严格单调、连续和可导，而且有 $x'_y=\cos y>0$，所以根据定理4.5知反函数 $y=\arcsin x$在对应区间（-1，1）内可导，且有

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

因此

$$(\text{arc}\ \sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同样可得

$$(\text{arc}\ \cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 6 求反正切函数 $y=\text{arc}\ \text{tg}x$ 的导数。

解 因为正切函数 $x=\text{tg}y$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内严格单调、连续和可导，且有$x'_y=\sec^2 y>0$。根据定理4.5知，其反函数 $y=\text{arctg}x$ 在对应的区间$(-\infty,\ +\infty)$内可导，且有

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\text{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

因此

$$(\text{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同样可得.

$$(\text{arc}\ \text{ctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

三　复合函数的求导法则

在第一章里曾指出，初等函数都是由一些基本初导函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算而成，关于四则运算的求导数法则上面已经建立，这里给出复合函数的求导法则。

定理4.6 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在某一点x存在导数 $\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$在其对应点u也存在导数 $f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点x也可导，且有

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x),$$

或

$$y_x'=y'_u\cdot u'_x.$$

本定理可以叙述为：复合函数的导数等于已知函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数，通常称之为**链式法**

则。

证明 根据已知条件，当对自变量x给出改变量Δx时，对应的中间变量u和函数y也有改变量Δu和Δy。因为函数$y=f(u)$在点u可导，故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),$$

如果令

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u), \tag{4.4}$$

其中$\Delta u\neq 0$，且当$\Delta u\to 0$时，$\alpha\to 0$。

然而，这里的$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$完全有这种可能，$\Delta x\neq 0$，而$\Delta u=0$，为此把（4.4）式改写如下

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u, \tag{4.5}$$

为了使当$\Delta u=0$时，α有定义，又不失去它是无穷小量的性质，现规定如下

当$\Delta u=0$时，$\alpha=0$。

这样不论$\Delta u=0$或$\Delta u\neq 0$，(4.5)都成立。

将（4.5）式的两端同除Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

当$\Delta x\to 0$时，有$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\varphi'(x)$；$\Delta u\to 0$和$\alpha\to 0$。故得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x),$$

即复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x可导，且有

$$y'=f'(u)\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x). \qquad \square$$

例7 求函数$y=\sin x^2$的导数。

解 求函数$y=\sin x^2$的导数，如果用导数定义计算，则很繁琐，但是用链式法则计算却十分简便。把$y=\sin x^2$看成$y=\sin u$和$u=x^2$的复合，则得

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x = 2x\cos x^2。$$

例 8 求函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的导数。

解 把 $y=\sqrt{1+x^2}$ 看成 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 的复合，由链式法则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}。$$

例 9 求幂函数 $y=x^\alpha$（α为实数，$x>0$）①的导数。

解 将幂函数变成指数函数的形式

$$y = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha\ln x}。$$

这时把函数 $y=e^{\alpha\ln x}$看成由 $y=e^u$，$u=\alpha\ln x$ 复合而成。由链式法则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$= e^u \cdot (\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

因此得到幂函数的导数公式

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha\text{为实数，} x>0)。 \qquad (4.6)$$

应用公式（4.6），易求下列函数的导数：

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt[5]{x^2})' = (x^{\frac{2}{5}})' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}};$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-(n+1)} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

例10 求 $y=\ln|x|$（$x\neq0$）的导数。

---

① α为实数，限定 $x>0$，即对不同的α，$x>0$ 是使公式(4.6)成立的公共区域。实际上对于某些α，使得公式(4.6)成立的x的变化范围可以扩大，详见本章的学习指导。

解 当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$。当 $x<0$ 时，令 $t=-x$ 那么 $y=\ln|x|$ 可以看成 $y=\ln t$ 和 $t=-x$ 的复合。由链式法则得

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x \\ &= \frac{1}{t}(-x)' = \frac{1}{t}(-1) = \frac{1}{-t} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

总之有

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

例11 求双曲函数的导数。

解 $y=\operatorname{sh}x$，$y'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$；

$y=\operatorname{ch}x$，$y'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$；

$y=\operatorname{th}x$，$y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$ （用商的求导法则）；

$y=\operatorname{cth}x$，$y'=\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$ （同上）

§4.5 初等函数的导数

到此为止，我们已经讨论了幂函数，指数函数，对数函数、三角函数和反三角函数等五种基本初等函数的导数，为了便于查阅和记忆，现列表如下：

1 $(c)'=0$ （c是常数）；

2 $(x^a)'=ax^{a-1}$，及 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$；

3 $(a^x)'=a^x\ln a$，及 $(e^x)'=e^x$；

4 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，及 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$。

5 $(\sin x)'=\cos x$；

6 $(\cos x)'=-\sin x$；

7 $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

8 $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$。

9 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

10 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

11 $(\mathrm{arc\ tg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$；

12 $(\mathrm{arc\ ctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$。

13 $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$；

14 $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$；

15 $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$；

16 $(\mathrm{cth}x)'=\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$。

关于有理函数 $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的导数，用商的导数法则可得

$$y'=\frac{P'(x)Q(x)-Q'(x)P(x)}{[Q(x)]^2}.$$

因为$P'(x)$和$Q'(x)$都是多项式，所以有理函数的导数仍然是有理函数。

综上所述，有理函数与基本初等函数在其定义域上都可导，其导函数仍是初等函数。

我们不止一次地指出：初等函数是以常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合运算而构成。不难看到，根据导数表与其求导法则，任何一个初等函数都可导，其导函数仍然是初等函数。

四则运算的求导法则容易掌握，而复合函数的求导法则，即链式法则比较难以掌握。而我们所遇到的函数多数又是复合函数。因此熟练掌握链式法则是十分重要的。

例1 求函数 $y=\ln\cos\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$ 的导数。

解 第一步将这个复合函数“分解”成基本初等函数：

$$y=\ln u$$

$$u=\cos v$$

$$v=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}w$$

$$w=\operatorname{sh}x.$$

第二步应用链式法则：

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u\cdot u'_v\cdot v'_w\cdot w'_x \\ &= \frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot\frac{1}{1+w^2}\cdot\operatorname{ch}x. \end{aligned}$$

第三步代回原来的变量，并进行整理：

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)}\cdot[-\sin\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)] \\ &\quad\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2x}\cdot\operatorname{ch}x \\ &= -\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)\cdot\frac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{sh}^2x} \\ &= -\operatorname{sh}x\cdot\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x}=-\operatorname{th}x. \end{aligned}$$

对初学者来说，按照上述步骤求函数的导数是完全必要的。因为这样复合层次分明，所以不致于产生遗漏与重复的

错误．但是，当我们掌握了链式法则之后，总是按照上述步骤求函数的导数仍然有些繁琐．通常在求函数的导数过程中，只要按照复合函数的层次逐次地应用链式法则，就能迅速准确地求出复合函数的导数．

例 2 求函数 $y=\sin^3\sqrt{e^{\arcsin x}}$ 的导数．

解 如果把 $\sin\sqrt{e^{\arcsin x}}$ 看成变量，利用幂函数的求导数公式，得

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot(\sin\sqrt{e^{\arcsin x}})',$$

再把$\sqrt{e^{\arcsin x}}$看成变量，就可以用正弦的求导数公式，得

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot(\sqrt{e^{\arcsin x}})',$$

如果把 $e^{\arcsin x}$看成变量，利用幂函数求导数公式，得

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}\cdot(e^{\arcsin x})',$$

这时把 arc sin$x$看成变量，就可以用指数函数求导数公式，得

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}\cdot e^{\arcsin x}\cdot(\arcsin x)',$$

由于 arcsin$x$有导数公式，最后得

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}\cdot e^{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

以上是按复合函数的层次逐步写出的．实际上求导数都是一次完成的，即

$$y'=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot(\sin\sqrt{e^{\arcsin x}})'$$

$$=3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot(\sqrt{e^{\arcsin x}})'$$

$$= 3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}$$

$$\cdot(e^{\arcsin x})'$$

$$= 3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}$$

$$\cdot e^{\arcsin x}\cdot(\text{arc }\sin x)'$$

$$= 3\sin^2\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\cos\sqrt{e^{\arcsin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\arcsin x}}}$$

$$\cdot e^{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

当我们熟记导数公式表，又掌握求导法则特别是链式法则后，就可以求任意的初等函数的导数。

例 3　求函数 $y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 的导数。

解 $y' = e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}。$$

例 4　求函数 $y = \text{arctg}(\text{tg}^2x)$

解 $y' = \frac{1}{1+\text{tg}^4x}\cdot 2\text{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}$

$$= \frac{1}{1+\text{tg}^4x}\cdot\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^3x\cdot\cos x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}。$$

例 5　求幂指函数

$$y = f(x)^{g(x)}$$

的导数。其中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均可导。

解　根据对数恒等式，把所给的函数改写成：

$$y = e^{g(x)\ln f(x)},$$

由复合函数的链式法则得

$$y' = e^{g(x)\ln f(x)}\cdot[g(x)\cdot\ln f(x)]'$$

$$=e^{g(x)\ln f(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

$$=f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

在求幂指函数的导数时不要去记忆这个复杂而又难以记忆的公式，只要掌握这种方法就可以了。

例如，求 $y=x^{\sin x}$ 的导数。

$$y'=(x^{\sin x})'=(e^{\sin x\ln x})'$$

$$=e^{\sin x\ln x}\left[\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=x^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right].$$

§ 4.6 函数不存在导数举例

定理4.1指出：可导必连续．而它的逆否命题（即它的等价命题）是：函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，那么它在这一点一定不可导．可见连续是可导的前提条件．

由导数的定义知，（4.3）存在双边的极限．换句话说，当$\Delta x\to0+0$与$\Delta x\to0-0$时，极限（4.3）都存在而且相等，这时函数 $f(x)$在点x_0存在导数．如果极限

$$\lim_{\Delta x\to0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数 $f(x)$在点x_0 的左导数，记作 $f'_-(x_0)$．如果极限

$$\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数 $f(x)$在点x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$．因此，由函数在一点存在极限的充要条件就得出：函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件，$f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 存在且相

等。在§4.2中，给出了函数 $y=|x|$ 是连续的，但是在 $x=0$不可导。因为函数 $y=|x|$ 在$x=0$的左导数与右导数存在，但不相等，即 $f'_-(0)=-1$与 $f'_+(0)=1$，所以函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导。

如果函数 $f(x)$在区间(a, b)内可导，且有

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'_+(a) \quad 和$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}=f'_-(b),$$

则称$f(x)$在$[a, b]$上可导。

一个连续函数 $f(x)$，如果它在点x_0处存在左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$，但是$f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ **的角点。函数在角点处不可导。**例如，函数

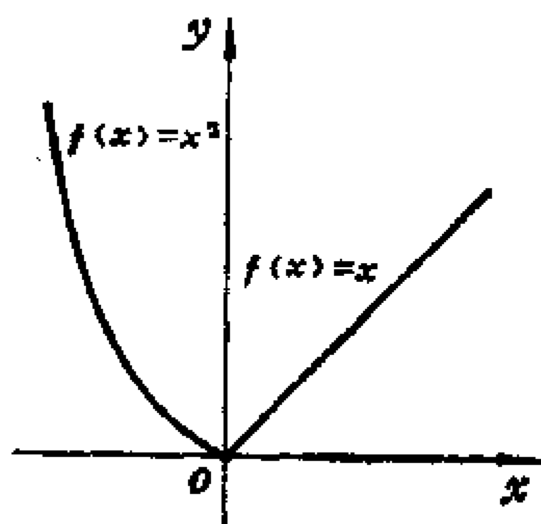


图4.3

$$f(x)=\begin{cases}x^2, 当x\leqslant 0时,\\ x\ , 当x>0时,\end{cases}$$

虽然在 $x=0$ 处函数连续，但是点 $x=0$ 是函数的角点（如图4.3）。事实上，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{\Delta x^2}{\Delta x}=\Delta x, & \Delta x<0,\\[2mm] \dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1, & \Delta x>0.\end{cases}$$

而
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\Delta x=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1,$$

即函数在$x=0$处左、右导数都存在，但不相等，故点 $x=0$ 是函数的角点，函数在 $x=0$ 处不可导。

对一个连续函数 $f(x)$ 而言，当 $\Delta x\to 0$ 时，如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$趋向无穷大，则称函数 $f(x)$ 在点x_0存在**无穷导数**，或说导数为无穷大。根据导数的定义，这种情况也是不可导。在无穷导数中，如果在某一点x_0两个单侧导数符号相异，则称点x_0为函数 $f(x)$的尖点（如图4.4）。

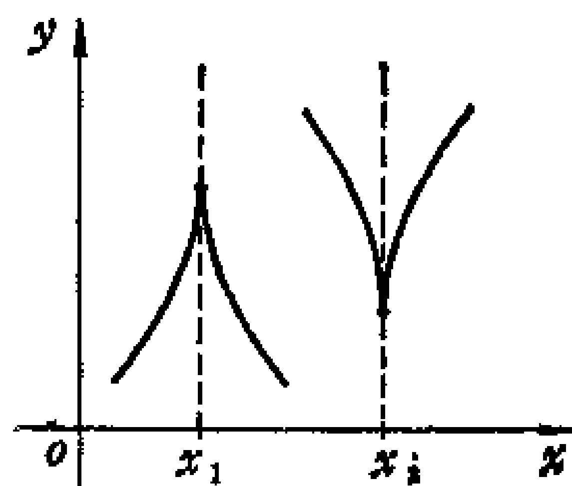


图4.4

例如，函数

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$$

$x=0$是它的尖点。事实上，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x^{\frac{1}{3}}},$$

且有

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{1}{\Delta x^{\frac{1}{3}}}=-\infty,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{1}{\Delta x^{\frac{1}{3}}}=+\infty,$$

故 $x=0$ 是尖点，函数在尖点$x=0$ 不可导(如图4.5)。

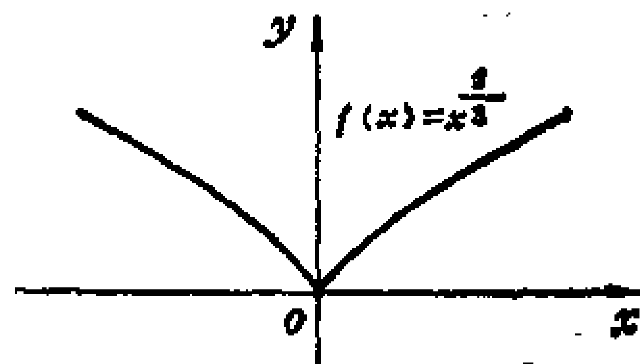


图4.5

除此之外，还会遇见这样的函数，它在某点虽然连续，但是函数在该点连左、右导数都不存在（指摆动不定），当然是不可导。

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在点$x=0$是连续的。事实上，当$\Delta x\neq 0$时，

$$|\Delta y|=|f(0+\Delta x)-f(0)|=\left|\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right|\leqslant|\Delta x|,$$

当$\Delta x\to 0$时，有 $\Delta y\to 0$，故函数 $f(x)$ 在点$x=0$连续．然而，由于有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，它不趋向任何极限，这是因为当 $\Delta x\to 0$ 时，$\sin\frac{1}{\Delta x}$在 1 和 -1之间无限次地摆动缘故，实际上从函数的图象（如图4.6）也可以看到．曲线过原点的割线，当$\Delta x\to 0$时，割线在直线 $y=x$ 与 $y=-x$之间无限次地摆动，故函数 $f(x)$ 在点$x=0$不存在切线．

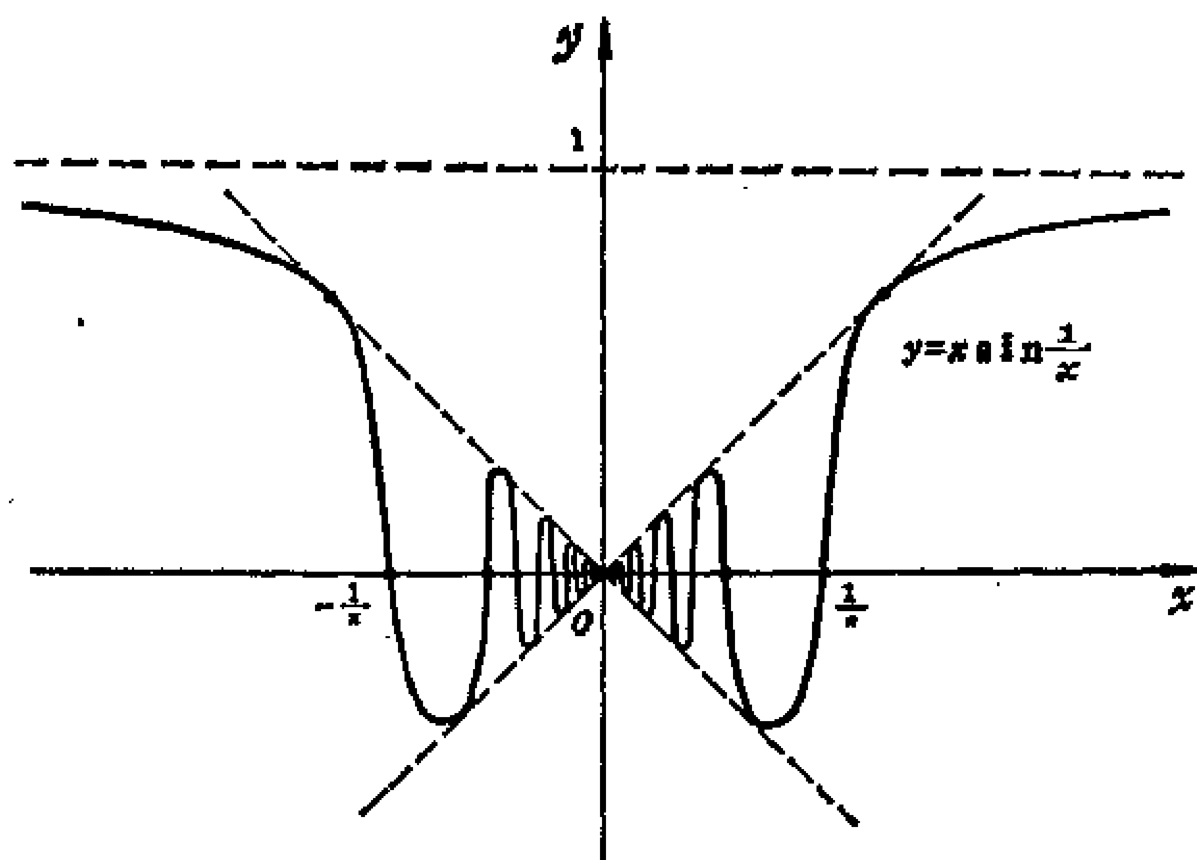


图4.6

§4.7 微　　分

以上各节讨论了导数，即讨论了函数的改变量 Δy 与自变

量的改变量Δx之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$（当 $\Delta x\to 0$） 的极限. 在这个过程中，只是关心改变量之比的极限是否存在，而不是改变量的本身，然而在许多情况下，要考察在Δx很小时函数改变量Δy与Δx之间的关系.

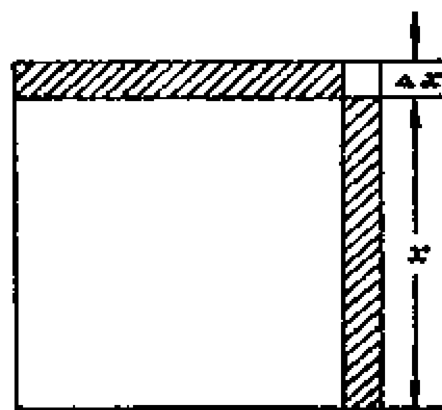


图4.7

例如，正方形的面积S是边长x的函数

$$S=x^2,$$

对边长x给出一个改变量Δx，而面积S相应地有怎样的改变？如图 4.7 示，函数的改变量

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

由此可见，在 ΔS 的表达式里包括两部分：第一部分是面积改变量的主体部分，即$2x\Delta x$，也就是关于 Δx 的线性部分(图4.7中的影线部分)；第二部分是 $(\Delta x)^2$，即图 4.7 中右上角的小方块部分. 因为它是Δx的平方项，当$\Delta x\to 0$时，它是Δx的高阶无穷小，所以，当Δx很小时，面积的改变量ΔS就可以用$2x\Delta x$近似地代替. 对此我们自然要问，函数 $y=f(x)$ 在什么条件下，它的改变量 Δy 可分成上述的两个部分呢？函数改变量Δy的主要部分（关于Δx的线性部分）是什么？为此，我们有下面的微分概念.

一 微分的定义及其与导数的关系

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点x某个邻域内有定义，对自变量的改变量Δx，如果函数的改变量Δy可以分解为

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x), \tag{4.6}$$

其中A不依赖于Δx的常数，则称函数 $y=f(x)$在点x**可微**，而称 Δy的线性主要部分$A\Delta x$为函数 $f(x)$ 在点x的**微分**，记作

$$dy=df(x)=A\Delta x.$$

必须指出，（4.6）式表明微分有如下两个特点：

（1）微分dy是关于自变量的改变量Δx的线性函数；

（2）dy与函数的改变量Δy之差是关于Δx的高阶无穷小，即$\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}\to 0$（当$\Delta x\to 0$时）。

在微分的定义中，假定："如果函数的改变量Δy可分解为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中$A$不依赖于$\Delta x$"。那么，对于一般函数$f(x)$在点$x$具备什么条件才可微呢？其中常数$A$与$f(x)$有什么关系呢？为此给出如下定理。

定理4.7 函数$f(x)$在点x可微的充要条件是函数$f(x)$在点x存在导数$f'(x)$，且$A=f'(x)$。

证明 **必要性** 如果函数$f(x)$在点x可微，由微分的定义，有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中A不依赖于Δx。用Δx除等式的两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

取极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A+0=A.$$

此式表明极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，且等于$A$，即函数$f(x)$在点$x$处存在导数，且有$A=f'(x)$。

充分性 因为函数$f(x)$在点x存在导数$f'(x)$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x),$$

根据定理2.19，可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,\quad \alpha\to 0\ （当\Delta x\to 0时）,$$

将等式两边同乘以Δx，有

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \text{ 即 } \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

于是Δy可分解为关于Δx的线性主要部分 $f'(x)\Delta x$ 与关于Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$之和。由微分定义，函数 $f(x)$在点x处可微。 □

定理指出：函数在一点可微与在一点可导是等价的。由于$A = f'(x)$，所以函数的微分可表示如下

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (4.7)$$

特别地，如果函数 $y = f(x) = x$，而 $f'(x) = (x)' = 1$，则有如下等式

$$dx = dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

这说明：**自变量的改变 Δx 就等于自变量的微分 dx**。这样一来，(4.7) 式又可改写成

$$dy = f'(x)dx \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = f'(x). \qquad (4.8)$$

公式 (4.8) 给出：求函数的微分，只要求出函数的导数再乘以自变量的微分即可。注意，在导数的定义中，导数的符号$\frac{dy}{dx}$是当作一个完整的记号，不具有商的意义。但是，当给出微分概念之后，导数符号$\frac{dy}{dx}$实际上是函数微分dy与自变量微分dx的商。因此，$\frac{dy}{dx}$可作为分式参加运算。导数亦称微商，也源于此。

例1 求函数 $y = x^3$在点x的微分。

解 用微分定义作

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \Delta x^3$$
$$= 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + (\Delta x)^2)\cdot\Delta x,$$

Δy的线性主部是 $3x^2\Delta x$，而剩余的项较Δx为高阶无穷小，即

$$\frac{(3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x}{\Delta x} = 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0 \text{ (当}\Delta x \to 0\text{时)},$$

故 $dy=3x^2\cdot\Delta x=3x^2dx$.

而应用（4.8）式易得

$$dy=(x^3)'dx=3x^2dx.$$

例2 求函数 $y=2^{\sin x}$在点x的微分。

解 $dy=(2^{\sin x})'dx$

$$=2^{\sin x}\cdot\ln2\cdot\cos x dx.$$

二 微分的几何意义

微分和导数一样具有明显的几何意义.

设函数 $y=f(x)$ 的图象(如图4.8)是曲线，在曲线上任取一点 $M(x,y)$，过点M作曲线的切线 T；我们知道导数 $f'(x)$ 在几何上就等于切线 T 的斜率 $\text{tg}\theta$。

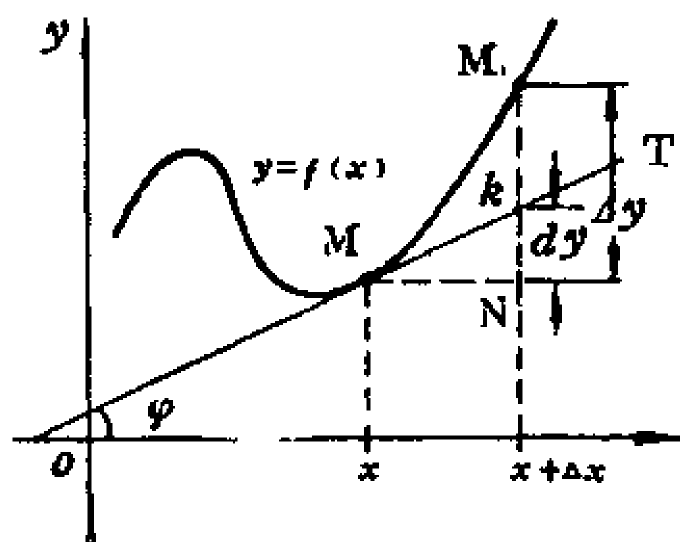


图4.8

在点x给自变量改变量Δx，相应地就得到函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=M_1N$，同时切线$T$的纵坐标对$\Delta x$的改变量是 KN。由于三角形MNK是直角三角形，又 $MN=\Delta x$，$\text{tg}\theta=f'(x)$，就有

$$KN=MN\cdot\text{tg}\theta=f'(x)\cdot\Delta x=dy,$$

这就是说，当曲线 $y=f(x)$ 在点M的横坐标 x 有一个改变量 Δx 时，相应的微分 dy 是曲线 $y=f(x)$ 过点M切线T 的改变量.

在几何上Δy与dy之差就是M_1K。从直观可以看出，当Δx减小时，M_1K和KN都随着变小，且趋近于0。而 M_1K比KN趋近0于的速度更快。因此，用dy近似地代替Δy，在几何上就相当于用切线的改变量代替曲线的改变量。这是“以直代曲”的理论根据.

三　运算法则

上面已经指出，求微分的运算实际上就是求导数的运算，因为（4.8）式给出，求出函数的导数$f'(x)$再乘以dx就得到函数的微分dy。因此，通常把求导数和求微分的运算统称为**微分法**。

不难从§4.5的基本初等函数导数表得到相应的**微分表**。例如，

$$y=x^a,\quad dy=ax^{a-1}dx,$$

$$y=a^x,\quad dy=a^x\ln a dx,$$

$$y=\cos x,\quad dy=-\sin x dx,$$

$$y=\ln x,\quad dy=\frac{1}{x}dx,\quad \text{等等.}$$

至于微分法则也不难由相应的求导法则得到：

(1) $d(cu)=cdu$,　　(2) $d(u\pm v)=du\pm dv$,

(3) $d(uv)=vdu+udv$,　　(4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

在此只证明商的微分法则：

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx$$

$$=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx$$

$$=\frac{v(u'dx)-u(v'dx)}{v^2}$$

$$=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

其中用了$du=u'dx$ 和 $dv=v'dx$。

例3　设函数$u(x)$与$v(x)$都在点x可微，$y=\frac{u(x)}{[v(x)]^2}$，求dy。

解　由微分公式，有

$$dy = y'dx$$
$$= \left(\frac{u}{v^2}\right)' dx$$
$$= \frac{v^2u'dx - 2uvv'dx}{v^4}$$
$$= \frac{vdu - 2udv}{v^3}.$$

利用微分法则做：

$$dy = d(u \cdot v^{-2})$$
$$= v^{-2}du - 2v^{-3}udv$$
$$= \frac{vdu - 2udv}{v^3}.$$

此例似乎给我们这样一个错觉，利用微分法则求微分较利用导数求微分更为简便．其实不然，两种方法各有所长，但是在实际运算中利用导数求微分较为普遍．

四　近似计算

当 $\Delta x \to 0$ 时，不仅 $\Delta y \to 0$，而且用来表示它的线性主部 $dy = f'(x)\Delta x \to 0$（当然假定 $f'(x) \neq 0$），甚至可以证明Δy与dy当$\Delta x \to 0$时是等价无穷小，事实上，（4.6）式可改写成

$$\Delta y = dy + o(\Delta x),$$

将上式两端除dy，并注意 $f'(x) \neq 0$，则有

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x}$$
$$= 1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

当$\Delta x \to 0$时，由于$\frac{\Delta y}{dy} \to 1$，所以 $dy \sim \Delta y$．这就是说，在Δx充分小的条件下，有

$$\Delta y \doteq dy, \tag{4.9}$$

或把它写得具体些（注意这里取 $x=x_0$），就是

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\Delta x. \qquad (4.10)$$

很明显，在（4.10）式中舍去了较Δx为高阶无穷小的项．这样一来利用近似等式（4.10）计算 $f'(x_0)\Delta x$要比计算Δy简单得多．这因为函数 $f(x)$的结构是多种多样的，所以Δy 的结构可能是Δx的很复杂的函数，而用Δx的线性函数 $f'(x_0)\Delta x$ 近似地代替Δy常常要简便得多．

令$x_0+\Delta x=x$，或$\Delta x=x-x_0$，近似公式（4.10）可改写成

$$f(x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)(x-x_0)$$

或

$$f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \qquad (4.11)$$

这就是用来近似代替函数 $f(x)$ 的近似公式．由于公式(4.11)中含有$(x-x_0)$ 的一次因子，所以也叫做一次近似公式．不难看出，$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线$y=f(x)$过点$(x_0,f(x_0))$的切线解析表达式（几何上叫做点斜式），因此，（4.11）式在本质上是“以直代曲”．

如果取 $x_0=0$，且Δx充分小，则（4.11）式就变成

$$f(x)\doteq f(0)+f'(0)\cdot x. \qquad (4.12)$$

在此基础上，利用公式（4.12），我们又得到几个简便而又常用的近似公式

(1) $\sin x\doteq x$；　　(2) $\operatorname{tg}x\doteq x$；

(3) $(1+x)^a\doteq 1+ax$；　　(4) $\sqrt[n]{1+x}\doteq 1+\frac{1}{n}x$；

(a为任意实数)

(5) $e^x\doteq 1+x$；　　(6) $\ln(1+x)\doteq x$；

这里只给（3）的证明，其它各式同法可证。

$f(x)=(1+x)^a$，a为任意实数，且 $f(0)=1$，$f'(0)=a$，代入公式（4.12）即得．

例4　计算$\sqrt[3]{131}$．

解　首先把给的根式变形

$$\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{5^3+6}=\sqrt[3]{5^3\left(1+\frac{6}{5^3}\right)}=5\cdot\sqrt[3]{1+\frac{6}{5^3}},$$

再利用公式（4），得

$$\sqrt[3]{1+\frac{6}{5^3}}\doteq 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5^3},$$

从而

$$\sqrt[3]{131}\doteq 5\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5^3}\right)=5+\frac{6}{3\cdot 5^2}\doteq 5.08.$$

例5　计算 $\sin 32°15'$.

解　在正弦函数表与余弦函数表中，可查得

$\sin 32°12'=0.5329$, $\cos 32°12'=0.8462$.

令　$x_0=32°12'$, $\Delta x=3'=\dfrac{3\pi}{60\times 180}$（弧度）.

由公式（4.11），得

$$\sin(x_0+\Delta x)\doteq \sin x_0+\cos x_0\cdot\Delta x,$$

有

$$\begin{aligned}\sin 32°15' &\doteq \sin 32°12'+\cos 32°12'\cdot\frac{3\pi}{60\times 180}\\ &=0.5329+0.8462\cdot\frac{3\times 3.1416}{60\times 180}\\ &=0.5329+0.0007\\ &=0.5336.\end{aligned}$$

这里由 $\Delta x=3'$ 所引起的修正值与表中查出来的修正值完全一致。

例6　车工在加工锥形工件时（也叫拨稍），需要计算稍度角α（如图4.9），当α小于5°时，工人常用的公式为

$$\alpha=28.6°\cdot\frac{D-d}{h},$$

问这个实用公式是怎样求得的？

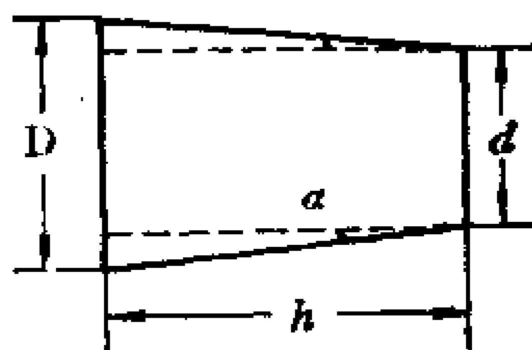


图4.9

解　从图4.9易见

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{D-d}{2}}{h}=\frac{D-d}{2h}.$$

当α很小时，由近似公式 $\operatorname{tg}\alpha \doteq \alpha$（$\alpha$ 角取弧度值），得

$$\alpha \doteq \frac{D-d}{2h},$$

而 1 弧度$\doteq 57.3°$，于是

$$\alpha \doteq 57.3°\frac{D-d}{2h} \doteq 28.6°\frac{D-d}{h}.$$

五　微分形式的不变性

我们知道，当x是自变量时，函数 $y=f(x)$ 的微分可由（4.7）式改写成（4.8）式. 如果x不是自变量，而是一个新自变量t的可微函数 $x=\varphi(t)$，则（4.8）式仍然成立.

事实上，设 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$，而 $y=f[\varphi(t)]$是t的复合函数. 由链式法则得 $y'_t=f'(x)\cdot\varphi'(t)$. 于是变量 y的微分为

$$dy=y'_t\cdot dt=f'(x)\cdot\varphi'(t)dt.$$

另外，因为 $x=\varphi(t)$是t的可微函数，所以 $dx=\varphi'(t)dt$，故上式又可写为

$$dy=f'(x)dx.$$

这件事实表明，不论x是自变量还是中间变量，函数 y 的微分形式保持不变，把这个性质叫做**一阶微分形式不变性**. 而导数就不具备这样的性质，事实上，当x是自变量时，函数 $y=f(x)$ 的导数是 $f'(x)$，当x是中间变量时（即$x=\varphi(t)$），函数 $f[\varphi(t)]$ 的导数就变成 $f'(x)\cdot\varphi'(t)$ 了. 因此，上述事实告诉我们，当谈到导数时必须指明对那个变量求导，而谈到微分时，就无需指明对那个变量求微分. 微分形式不变性为微分运算提供了方便.

§ 4.8　高阶导数与高阶微分

一　高阶导数

在§4.2 里曾指出，若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一

点都存在导数 $f'(x)$，其导数仍是x的函数，即导函数．对此，我们还可以研究导函数 $f'(x)$的导数．

如果函数 $y'=f'(x)$ 存在导数，就把这个导数叫做已知函数 $y=f(x)$的二阶导数，并记作如下：

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

类似地，把二阶导函数 $y''=f''(x)$ 的导数叫做已知函数 $y=f(x)$ 的三阶导数，记为

$$y''',\quad f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

以此类推，把$(n-1)$阶导函数的导数叫做已知函数$y=f(x)$的n阶导数，记为

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶以及二阶以上的导数统称为**高阶导数**．

二阶导数有明显的物理意义．

设$S=f(t)$是物体的运动规律，其导数 $f'(t)=v(t)$ 表示该物体在时刻t的瞬时速度．现在进一步研究在时刻t的瞬时速度$v(t)=f'(t)$ 的变化率．在时刻t给出改变量Δt，则相应的速度v也有改变量Δv，公式

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t}$$

表示在时间Δt内运动物体的平均加速度．如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t}$$

存在，则其极限就是运动物体在时刻t的加速度，即

$$v'=f''(t).$$

因此说，运动物体的加速度是其运动规律 $S=y(t)$ 的二阶导数．

已知函数 $f(x)=x^3$，不难求出它的各阶导数：

$$f'(x)=2x,$$
$$f''(x)=2,$$
$$f'''(x)=0,$$
$$f^{(k)}(x)=0,\ k\geqslant 3.$$

图4.10给出了函数 $f(x)=x^2$，及其各阶导函数的图象。函数 $f(x)=x^2$的一阶导数 $f'(x)=2x$,表明函数 $f(x)=x^2$ 的曲线各点切线斜率的变化规律，即各点的切线斜率与x成正比；函数的二阶导数 $f''(x)=2$,表明一阶导函数 $f'(x)=2x$ 的直线各点切线斜率都等于 2；$f'''(x)=0$ 表明二阶导函数是常数，其各点的切线斜率都等于零等等。

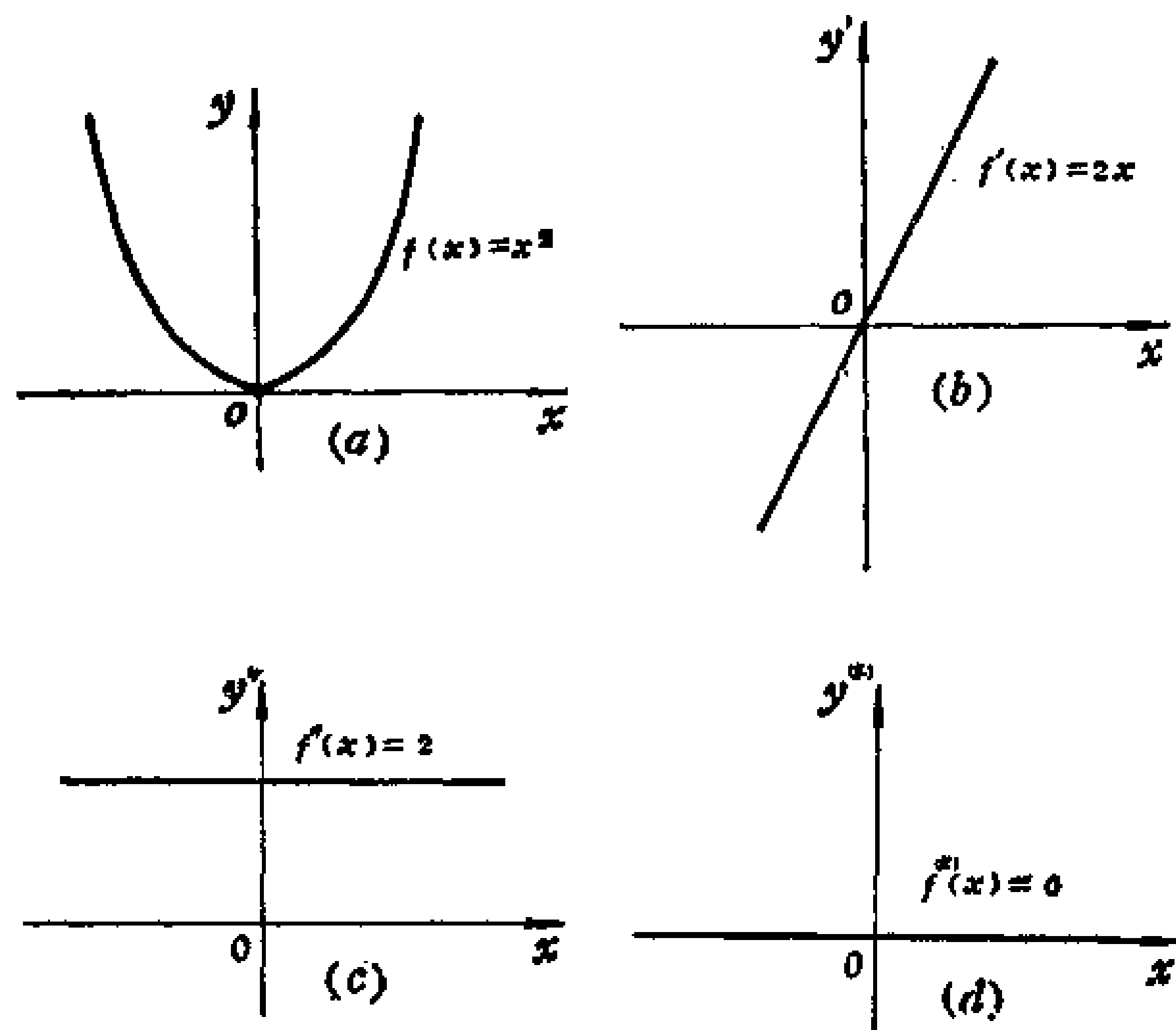


图4.10

二　几个基本初等函数的高阶导数公式

欲求某函数的 n 阶导数，通常是连续地求出若干阶导数之

后，用归纳法得到n阶导数的公式。

例1 求幂函数 $y=x^a$（a为任意实数）的n阶导数。

解 根据幂函数求导公式依次可得

$$y'=ax^{a-1},\quad y''=a(a-1)x^{a-2},$$

$$y'''=a(a-1)(a-2)x^{a-3},\cdots\cdots.$$

由数学归纳法不难得到

$$y^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.$$

特别地，当 $a=-1$时，则有

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

当 $a=-\frac{1}{2}$时，则有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=\frac{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2x)^n\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}}.\text{①}$$

当a取自然数n时，有

$$(x^n)^{(n)}=n!,$$

容易看出，当阶数大于n时，其导数都等于零。

例2 求 $y=\ln x$的n阶导数。

解 首先有

$$y'=\frac{1}{x},$$

再利用例1中当$a=-1$的结果不难得到

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

---

① 记号$n!!$表示最大数不超过n的双阶乘。

例如：$10!!=10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2$；$9!!=9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$。

例3 求 $y=a^x$的n阶导数.

解 利用指数函数的求导数公式依次求得:

$$y'=a^x\ln a,\quad y''=a^x(\ln a)^2,\ \cdots\cdots.$$

用数学归纳法不难得到

$$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

特别地, 当$a=e$时, 有

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

例4 求 $y=\sin x$的n阶导数.

解 由三角函数的求导公式依次得:

$$y'=\cos x,\ y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x,\ y^{(4)}=\sin x,\ \cdots.$$

为了寻找n阶导数的一般公式我们把一阶导数改写成

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

再求一次导数, 得

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

容易看出, 每求一次导数, 正弦函数的初相角增加了$\frac{\pi}{2}$. 用数学归纳法不难证得:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

三 运算法则

只要逐阶地应用代数和的求导法则, 就可求得

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

关于两个函数乘积的高阶导数就不那么简单, 下面就来探索其中的规律.

假设函数 $u(x),v(x)$有任意阶寻数. 对乘积函数 $y=uv$逐

阶求导数，得

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$\cdots\cdots$$

从中不难发现，它们的系数与牛顿① 二项式展开式的系数完全一致，而且函数u，v导数的阶数排列与二项式展开式的幂次排列也完全一致（其中$u^{(0)} = u$，$v^{(0)} = v$）。因此，很自然地猜想到两个函数乘积的n阶导数应是

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \qquad (4.13)$$

实际上，这种猜想是对的，下面就用数学归纳法证明之。

当 $n = 1$ 时，公式（4.13）是正确的；假设 n 阶导数公式(4.13)是正确的；现在证明$(n+1)$阶导数公式(4.13)也是正确的。由求导法则和高阶导数的定义有

$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}]'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}]$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} + uv^{(n+1)}$$

① 牛顿：Newtno，I.英国数学家，1643—1727。

$$= u^{(n+1)}v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)}$$

$$= u^{(n+1)}v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)}$$

$$= u^{(n+1)}v + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} ①$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)}, \tag{4.14}$$

即证明了 $(n+1)$ 阶导数公式 (4.13) 也是正确的。公式(4.13)称为**莱布尼兹**②**公式**。

至于求商的高阶导数就更加复杂了，当需要求商的高阶导数时，一般是逐阶进行就可以了。但是在实际计算时，通常把 $y=\frac{u}{v}$ 写成乘积的形式 $y=u\cdot\frac{1}{v}$，然后再利用莱布尼兹公式。

例 5 求 $(x^2\cos x)^{(50)}$。

解 令 $u=\cos x$, $v=x^2$, 且

$$u^{(k)}=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right);\ v'=2x,\ v''=2,\ v^{(m)}=0,\ (m\geqslant 3).$$

应用莱布尼兹公式，有

---

① $$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!}[k+(n-k+1)]$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!}$$
$$=C_{n+1}^k.$$

② 莱布尼兹：Leibniz, G, W，德国数学家，1646—1716。

$$(x^2\cdot\cos x)^{(50)}=\cos\left(x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2$$

$$+C_{50}^1\cos\left(x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x$$

$$+C_{50}^2\cos\left(x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$$

$$=-x^2\cos x+50\cdot 2x\cdot(-\sin x)$$

$$+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot\cos x$$

$$=(2450-x^2)\cos x-100x\cdot\sin x.$$

例 6 求函数 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$的$n$阶导数。

解 令 $u=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$，$v=x$。且

$$u'=-\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}},\ u''=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+x)^{-\frac{7}{3}},\ \cdots\cdots$$

$$u^{(m)}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3m-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3m+1}{3}};$$

$$v'=1,\ v^{(m)}=0\ (m\geqslant 2).$$

应用莱布尼兹公式，有

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot x\right)^{(n)}$$

$$=(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n}(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}\cdot x$$

$$+C_n^1(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)}{3^{n-1}}(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$=(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)}{3^{n-1}}(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}\left[\frac{3n-2}{3}x\right.$$

$$\left.-n(1+x)\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}.$$

四　高阶微分

高阶微分的定义与高阶导数的定义完全类似，也是逐阶定义的。把函数 $y=f(x)$ 的微分的微分叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶微分，记为 $d^2y=d(dy)$；把函数 $y=f(x)$ 的二阶微分的微分叫做函数 $y=f(x)$ 的三阶微分，记为 $d^3y=d(d^2y)$；一般地，把函数 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶微分的微分叫做函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微分，记为 $d^{(n)}y=d(d^{n-1}y)$。

我们很自然地会想到，高阶导数与高阶微分之间是否也有象一阶导数与一阶微分那样的等价关系呢？为此，首先重温函数 $y=f(x)$ 的一阶微分 $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$。如果 x 是自变，则 $dx=\Delta x$。而 Δx 是自变量的改变量，它与 x 无关，所以 dx 也是与 x 无关的常数。因此对 $y=f(x)$ 求导数时，dx 应当看成常数因子。

再由二阶和三阶微分的定义，有

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy)=d[f'(x)dx]=[f'(x)dx]'dx \\ &= f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2, \\ d^3y &= d(d^2y)=d[f''(x)dx^2]=[f''(x)dx^2]'dx \\ &= f'''(x)dx^3, \end{aligned}$$

一般的可用数学归纳法证得

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n. \tag{4.15}$$

在上述公式中的符号 dx^2，$dx^3,\cdots,dx^n$ 就是 $(dx)^2$，(dx^3)，$\cdots,(dx)^n$。应把它与幂函数的微分符号 $d(x^2),d(x^3),\cdots,d(x^n)$ 严格区别开来。

公式(4.15)指出：函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微分等于该函数的 n 阶导数再乘上自变量微分 dx 的 n 次方。由此得到

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}. \tag{4.16}$$

在这之前，符号 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 表示函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，必须

把它看成一个整体符号，当有了高阶微分概念之后，可将$\frac{d^n y}{dx^n}$看作是函数 $y=f(x)$的n阶微分与dx的n次方dx^n的比。 在这种意义上，公式(4.15)与(4.16)是一致的。

从公式(4.15)看到，计算高阶微分可归结为求高阶导数。因此关于求高阶微分的例子这里不再重述。

我们自然地会想到，一阶微分形式具有不变性，而在高阶微分中是否还具有微分形式不变性呢？回答是否定的。

事实上，设 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$，$y=f[\varphi(t)]$ 关于 t 的一阶微分是

$$dy=f'[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \text{ 或 } dy=f'(x)dx,$$

在继续求微分的过程中，这里的dx不是常数了，而是函数 $x=\varphi(t)$的微分。只要函数 $x=\varphi(t)$不是线性函数（因为线性函数 $x=at+b$，有 $d^2x=0$），那么，它的二阶微分是

$$\begin{aligned}d^2y=d(dy)&=\{f'[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\}'dt\\&=\{f''[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\varphi'(t)+f'[\varphi(t)]\varphi''(t)\}dt^2\\&=f''[\varphi(t)]\cdot[\varphi'(t)dt]^2+f'[\varphi(t)]\varphi''(t)dt^2\\&=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,\end{aligned}$$

其中 $dx=\varphi'(t)dt$， $d^2x=\varphi''(t)dt^2$，显然，这里多出一项 $f'(x)d^2x$，即二阶微分形式有了变化。

§4.9 参数方程的导数

在解析几何里曾指出，函数可以表为参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t).\end{cases} \tag{4.17}$$

当我们研究 y对x的导数时，应将 y看作是x的函数。

假设函数 $\varphi(t)$，$\psi(t)$均可导，函数 $\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，其反函数也可导，且$\varphi'(t)\neq 0$；这时 y可表为x是复合函数，即

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]=f(x).$$

根据定理4.6知它也可导．由链式法则有

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\tag{4.18}$$

这就是参数的求导公式。

例1 椭圆的参数方程是 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，其中 $0<t<\pi$，求 y'_x。

解 由参数方程的求导法则，有

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\text{ctg}t.$$

例2 求摆线

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$$

在 $t=\frac{\pi}{2}$，$t=\pi$处的切线方程。

解 由参数方程的求导法则，有

$$y'_x=\frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

因此在摆线上对应于 $t=\frac{\pi}{2}$的点$\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),a\right)$ 处的切线斜率 k 是

$$k=y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,$$

根据解析几何中的点斜式方程，得切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

或 $$y=x+a\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

另外，由于 $y'_x|_{t=\pi}=0$，摆线上对应于$t=\pi$的点 $(a\pi,2a)$处的切线方程为

$y=2a$。

类似地，可进一步地计算参数方程的高阶导数，这里只讨论二阶导数。

在已知条件下，有 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]=f(x)$，且有 $y'_x=f'(x)$，显然它的参数方程应当是

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$$

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 关于 t 存在二阶导数，则函数 y'_x（是 t 的函数）关于 t 又可导，且

$$y''_{x^2}=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}。\text{①} \quad (4.19)$$

例 3 设 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，其中 $0<t<\pi$，试求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 由于此题满足例 1 的条件，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}\text{ctg}t$；因为函数 $a\cos t$ 和 $b\sin t$ 关于 t 存在二阶导数，所以函数 $-\dfrac{b}{a}\text{ctg}t$ 关于 t 又可导，从而利用公式（4.19）可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-\dfrac{b}{a}\text{ctg}t\right)'}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}。$$

① 符号 y''_{x^2} 的下角标 x^2 表示函数 y 对自变量 x 求二阶导数。

学 习 指 导

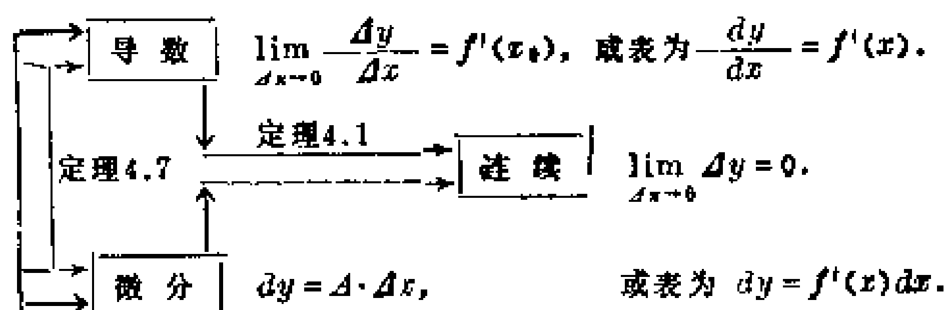
一　内容概要

1　重点及要求

因为导数和微分是微分学的两个重要概念，所以应当很好地掌握它。同时要理解两个概念的本质及其等价性。在此基础上，会判别函数在某一点是否可导（或可微）。

在这一章里，大量的内容是讨论求导数和微分的方法。因此，要熟练地掌握微分法，它不仅是微分学本身的需要，同时也是积分学的基础。为此目的，读者必须做大量的练习题。

2　导数、微分和连续三者间的关系



3　判别函数在一点是否可导（或可微）的主要工具

—（1）可导的必要条件——连续。不连续一定不可导。

—（2）可导的定义：极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在。

—（3）在连续的条件下，可导的充要条件是左、右导数存在且相等。

4　求导数应掌握的公式及法则

—（1）基本初等函数导数表。

—（2）导数的四则运算：

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + v'u,$$

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

—（3）反函数的导数：

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} .$$

—（4）复合函数的导数，即链式法则：

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

幂指函数的导数：

变 $y = f(x)^{g(x)}$ 为 $y = e^{g(x)\ln f(x)}$。

—（5）高阶导数中的莱布尼兹公式：

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

—（6）参数方程的导数：

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

5 求微分的方法

—（1）利用微分定义求微分：

从 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ 中取 $dy = A \cdot \Delta x$。

—（2）利用导数求微分：

根据定理4.7，$dy = f'(x)dx$。

—（3）利用微分法则求微分：

$$d(cu) = cdu,$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

6　近似公式

在近似公式中，$\Delta y \doteq dy$（当 Δx 很小时）是基本的。而(4.10)，(4.11)，都是从它派生的结果。在(4.12)的基础上又给出了六个常用的公式。

$\Delta y \doteq dy$（当Δx很小时）

→ —$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0)\Delta x$，令$x = x_0$，

　—$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，令$x = x_0 + \Delta x$，

$f(x) \doteq f(0) + f'(0)\cdot x$ →（当x很小时）

—$\sin x \doteq x$，

—$\mathrm{tg}x \doteq x$，

—$(1+x)^a \doteq 1 + ax$，

—$\sqrt[n]{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{n}x$，

—$e^x \doteq 1 + x$，

—$\ln(1+x) \doteq x$。

二　几点说明

1　导数是个局部性概念

为了理解导数是一个局部性概念，我们给出一例。函数只在一点可导，而在其它点都不可导。

例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当}x\text{为有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}, \end{cases}$$

仅在点$x = 0$可导。

事实上，应用导数定义证明函数$f(x)$在点$x_0 = 0$可导。根据定理4.1，只须证明函数$f(x)$在任意点$x_0 \neq 0$不连续（当然不可导）。

设$x_0 = 0$，当x为有理数时，有

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0;$$

当x为无理数时，也有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0;$$

这就说明，对任意的 x，都有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0.$$

故函数 $f(x)$ 在$x=0$处可导.

设 $x_0\neq 0$。当x_0为有理点时，取变量 x 是无理数，有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[0-x_0^2]=-x_0^2\neq 0;$$

当x_0为无理点时，取变量x是有理数，有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[x^2-0]=x_0^2\neq 0;$$

这说明了函数 $f(x)$ 在 $x=x_0\neq 0$处不连续。

2　导函数的定义域B

如果函数 $y=f(x)$的定义域是A，导函数 $f'(x)$ 的定义域是B. 一般来说，$B\subset A$，B 可能是A的真子集. 例如，已知函数 $f(x)=|x|$ 的定义域 $A=(-\infty,+\infty)$，而导函数 $f'(x)$ 的定义域 $B=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 显然，$B$是$A$的真子集. 再例如第一段中所举之例，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当}x\text{为有理数时,}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时,}\end{cases}$$

的定义域$A=(-\infty,+\infty)$，而导函数 $f'(x)$的定义域$B=\{0\}$。显然，B是A的真子集。

不仅如此，甚至可以构造出在其定义区间上是处处连续的，但是处处不可导的函数。换句话说，导函数的定义域B等于空集.

3　关于幂函数的导数

在本章的正文中，当求正整数幂的幂函数的导数时，自变量x可为任意实数；但是，在利用链式法则求任意实数幂的幂函数的导数时，要限制自变量 $x>0$，这是为什么呢？为此，

有必要重温幂函数的定义。已知幂函数

$$y=x^{\alpha}.$$

α			$y=x^{\alpha}$的定义域
α是整数	$\alpha>0$		$(-\infty,\ +\infty)$
	$\alpha<0$		$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$\alpha=\frac{q}{p}$ (p与q是互质的整数，且 $p>1$)	p是奇数	$q>0$	$(-\infty,\ +\infty)$
		$q<0$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	p是偶数		$(0,+\infty)$
α是实数			$(0,+\infty)$

当我们将幂函数 $y=x^{\alpha}$ 改为

$$y=e^{\alpha\ln x}$$

时，其定义域是（0，+∞），由链式法则，得到

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha\text{为实数},\ x>0).$$

但是，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 对某些α（如，α 是整数等）的定义域包含着区间$(-\infty,0)$或$(-\infty,0]$。因此，必须证明对某些α，幂函数 $y=x^{\alpha}$在区间$(-\infty,0)$或$(-\infty,0]$上的导数也是$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$。

事实上，由导数定义，对任意$x<0$（或 $x\leqslant 0$），要求 $x+\Delta x<0$，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}$$

$$=x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

已知极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha.$$

有
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

这就证明了当$x<0$时，幂函数导数公式成立。

三　例题选讲

例1　求下列函数的导数：

(1) $y=\ln|x|$，(2) $y=|\ln x|$，(3) $y=\ln|\ln x|$。

基本思路　去掉绝对值符号，在不同区间上求导数。

解（1）因为
$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & \text{当}x>0\text{时},\\ \ln(-x), & \text{当}x<0\text{时},\end{cases}$$

所以
$$y'=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{当}x>0\text{时},\\ -\frac{1}{x}, & \text{当}x<0\text{时}.\end{cases}$$

（2）因为
$$y=|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & \text{当}x>1\text{时},\\ 0, & \text{当}x=1\text{时},\\ -\ln x, & \text{当}\ 0<x<1\text{时},\end{cases}$$

所以
$$y'=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{当}x>1\text{时},\\ -\frac{1}{x}, & \text{当}0<x<1\text{时}.\end{cases}$$

在点$x=1$，有
$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{y\to 0+0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{y\to 0-0}\frac{\ln(1+y)}{y}=-1.$$

显然，$y'_+(1)\neq y'_-(1)$，因此函数在点 $x=1$ 不可导。

（3）因为

$$y=\ln|\ln x|=\begin{cases}\ln(\ln x), & 当x>1时,\\ \ln(-\ln x), & 当0<x<1时,\end{cases}$$

所以

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln x}, & 当x>1时,\\[2mm] \dfrac{1}{x\ln x}, & 当0<x<1时,\end{cases}$$

即 $$y'=\frac{1}{x\ln x},\quad 当0<x<1与x>1时。$$

例2　设 $y=f[\varphi(x)]$，其中的 f 和φ均为三次可微函数，求 y'，y''，y'''。

特别地，（1）当 $\varphi(x)=\left\{\dfrac{x}{2}\right\}$时，在区间 $[0,\ 2)$ 内求 y'，y''，y'''。

（2）当 $\varphi(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$时，在区间$[2, 4)$内证明 $y'=0$。

解
$$y'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x);$$
$$y''=f''[\varphi(x)]\cdot\varphi'^2(x)+f'[\varphi(x)]\cdot\varphi''(x),$$
$$\begin{aligned}y'''&=f'''[\varphi(x)]\cdot\varphi'^3(x)+2f''[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)\\&\quad+f''[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)+f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'''(x)\\&=f'''[\varphi(x)]\cdot\varphi'^3(x)+3f''[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)\\&\quad+f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'''(x).\end{aligned}$$

（1）由于函数 $\varphi(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}$是$\frac{x}{2}$的小数部分，在区间〔0, 2）内，$\varphi(x)=\frac{x}{2}$，即线性函线，所以上面各阶导数中，有$\varphi'(x)=\frac{1}{2}$，$\varphi''=0$，$\varphi'''=0$。故得

$$y'=\frac{1}{2}f'\left(\left\{\frac{x}{2}\right\}\right),$$

$$y''=\frac{1}{4}f''\left(\left\{\frac{x}{2}\right\}\right),$$

$$y'''=\frac{1}{8}f'''\left(\left\{\frac{x}{2}\right\}\right).$$

（2）由于函数 $\varphi(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$是$\frac{x}{2}$的最大整数，在区间〔2, 4）上，$\varphi(x)=\left[\frac{x}{2}\right]=1$，所以 $\varphi'(x)=0$，从而有 $y'=f'\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right)\cdot 0=0$。

例3 已知 $f(x)=|x|^3$，问 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 对一切x都存在吗？画出 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$的图象。

解 由于

$$f(x)=|x|^3=\begin{cases} x^3, & \text{当}x\geqslant 0\text{时}, \\ -x^3, & \text{当}x<0\text{时}, \end{cases}$$

所以当$x>0$时，$f'(x)=3x^2$；当$x<0$时 $f'(x)=-3x^2$。在$x=0$处有

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^3-0}{x}=0=f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x^3-0}{x}=0=f'_-(0),$$

即 $f'(0)=0$。于是

$$f'(x)=3x^2\cdot\operatorname{sgn}x.$$

在此基础上不难求得

$$f''(x)=6x \quad 当x>0时,$$
$$f''(x)=-6x \quad 当x<0时,$$

且有
$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f'(0+x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{3x^2-0}{x}=0=f''_+(0),$$
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f'(0+x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-3x^2-0}{x}=0=f''_-(0),$$

即
$$f''(0)=0。于是$$
$$f''(x)=6|x|.$$

对于二阶导函数 $f''(x)=6|x|$ 与函数 $y=|x|$ 无本质上的差别，当 $x>0$ 时，$f'''(x)=6$；当 $x<0$ 时，$f'''(x)=-6$；在 $x=0$ 处不存在导数。$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 的图象分别如图4.11 (a)，(b)，(c)，(d)示。

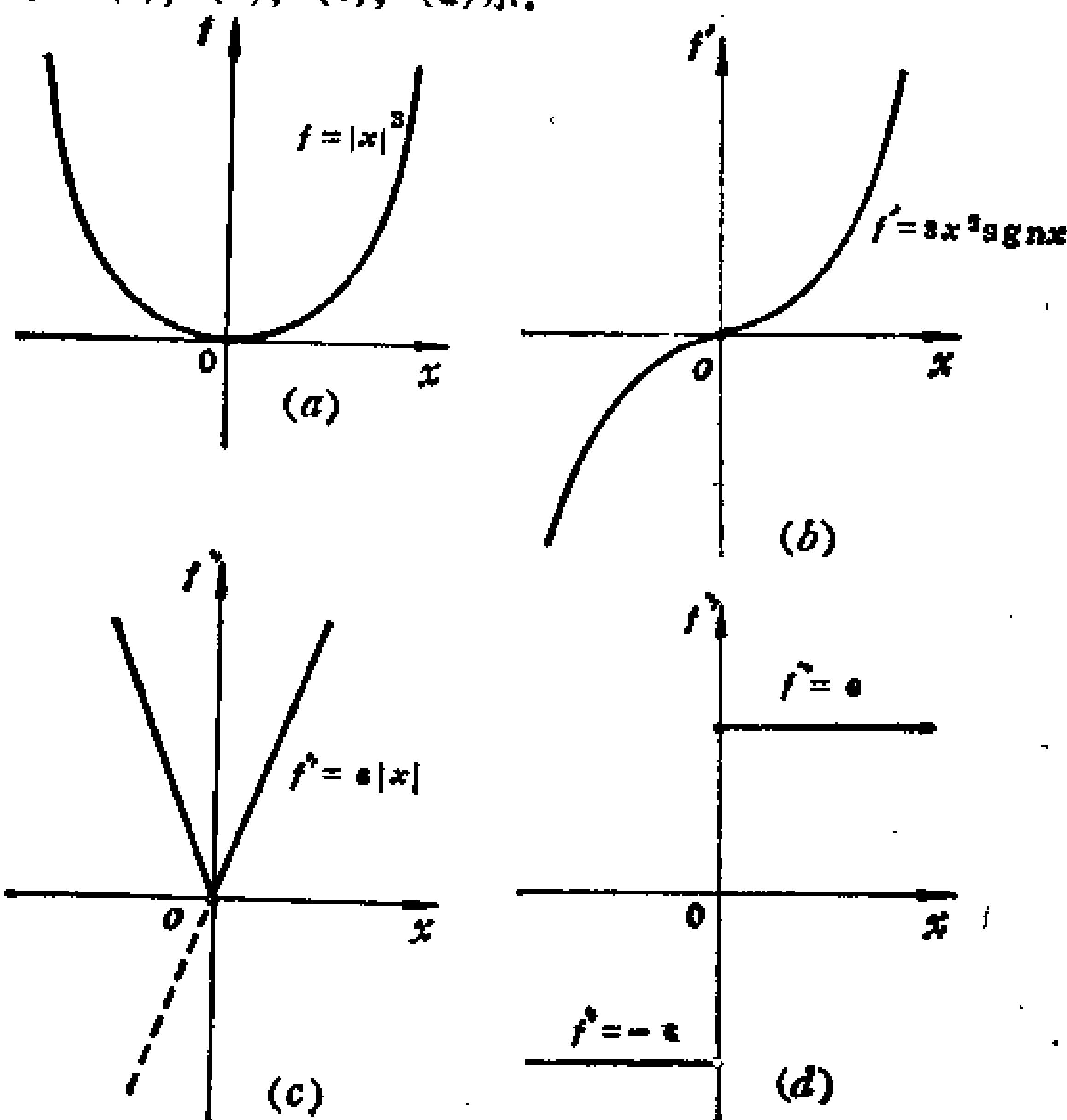


图 4.11

从例 3 中可以看出，函数的一阶导数和二阶导数的存在域与原来函数的定义域一样，即无变化。但是，三阶导数在$x=0$处就不存在，它的存在域较二阶导数的存在域缩小了。由此可见，在高阶导数的运算中，各阶导数的定义域有可能逐渐缩小。因此有时强调某个函数在指定的区间上存在 n 阶导数是完全必要的。

例 4 设 $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$，而 $h(x)$ 满足如下的条件：

$$h'(x)=\sin^2[\sin(x+1)],$$

$$h(0)=3,$$

求 $f'[h(0)]$。

基本思路 此题不必事先求出（现阶段不易实现）$h(x)$的解析表达式，而是直接利用链式法则求复合函数 $f[h(x)]$的导数，然后利用条件 $h(0)=3$。

解 因为复合函数为

$$f[h(x)]=h^2(x)\cdot e^{\frac{1}{h(x)}},$$

所以其导数是

$$\begin{aligned}f'[h(x)]&=f'(h)\cdot h'(x)\\&=\left[2h(x)e^{\frac{1}{h(x)}}-h^2(x)e^{\frac{1}{h(x)}}\cdot\frac{1}{h^2(x)}\right]\cdot h'(x)\\&=\left[2h(x)e^{\frac{1}{h(x)}}-e^{\frac{1}{h(x)}}\right]\sin^2[\sin(x+1)],\end{aligned}$$

当$x=0$时，$h(0)=3$，代入上式则得

$$\begin{aligned}f'[h(0)]&=(6e^{\frac{1}{3}}-e^{\frac{1}{3}})\sin^2(\sin1)\\&=5e^{\frac{1}{3}}\sin^2(\sin1).\end{aligned}$$

注 此题如下求法是错误的。当 $x=0$时$h(0)=3$，因此求$f'(3)$。先对 $f(x)$求导数，有

$$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}-x^2e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}},$$

代入$x=3$的值，得

$$f'(3)=6e^{\frac{1}{3}}-e^{\frac{1}{3}}=5e^{\frac{1}{3}}.$$

产生错误的主要原因是对函数$f[h(x)]$求导时没按复合函数进行，将因子$h'(x)$遗漏了。

例 5 证明

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

基本思路 用数学归纳法证明，并利用莱布尼兹公式。

证明 当$n=1$时，

$$\left(x^{1-1}e^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=(-1)^1\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},$$

显然公式成立。

假设当n时成立：

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}} \qquad (*)$$

只须证明$n+1$时也成立。为此有

$$\left(x^{n}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\left\{\left[(x)\cdot\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)\right]^{(n)}\right\}',$$

对右边花括号内的应用莱布尼兹公式得

$$\left(x^{n}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{(n-k)}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\right]'.$$

应当注意，在使用莱布尼兹公式时，其中的第一个因子是x，它的二阶以及二阶以上的导数都是零，因此公式里只含有两项($k=n$, $k=n-1$)：

$$\left(x^{n}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\left[n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}+x\cdot\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}\right]',$$

$$=n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}+\left[x\cdot(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\right]' \quad (\text{应用公式}(*))$$

$$=n(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}+(-1)^n\left[-\frac{n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x_2}\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{(n+1)+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

所以$n+1$时也成立，这就证明了

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

成立。

例 6　设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 当x\leqslant x_0时,\\ ax+b, & 当x>x_0时,\end{cases}$$

其中的函数 $f(x)$在$x=x_0$存在左导数。问a和b取何值时，使函数$F(x)$在点x_0处连续，且可导。

基本思路　利用连续和可导的条件，分别建立两个含有未知数a和b的方程。

解　要求函数$F(x)$在点x连续，有

$$F(x_0)=f(x_0)=ax_0+b \text{ 或 } b=f(x_0)-ax_0.$$

而　$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0+0}\frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0}=a.$$

由题设，当$x\leqslant x_0$时，有

$$F'_-(x_0)=f'_-(x_0).$$

要求函数 $F(x)$ 在点x_0可导，有

$$F'_-(x_0)=F'_+(x_0),$$

即　$f'_-(x_0)=a.$

故解得　$a=f'_-(x_0),$

$$b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0).$$

例 7 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在$x=0$处连续，但在$x=0$处不存在导数。

基本思路 利用连续的定义和判别函数在一点可导的充要条件：左、右导数存在且相等。

证明 因为

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x},$$

和
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x}=0=f(0),$$

所以函数 $f(x)$ 在$x=0$处连续。

又因为

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x}=\frac{\pi}{2},$$

而
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\pi}{2},$$

所以极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

不存在，故函数 $f(x)$ 在$x=0$处不存在导数。

例 8 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{a}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当}x\neq 0\text{时},\\ 0, & \text{当}x=0\text{时},\end{cases}$$

问a取何值时，使（1）函数$f(x)$在$x=0$处连续；（2）函数$f(x)$在$x=0$处可导；（3）函数$f(x)$在$x=0$处有连续的导函数。

基本思路 利用连续和导数的定义。以及当$a>0$时，当$x\to0$时，$x^a\cdot\sin\frac{1}{x}$是有界量与无穷小量之积。

证明（1）由题设有

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^a\sin\frac{1}{\Delta x},$$

要使 $$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x)^a\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

只须要$a>0$就可以了。因为，$a>0$，当$\Delta x\to0$时，就有$(\Delta x)^a\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\to0$。故当$a>0$时，函数$f(x)$在$x=0$处连续。

（2）根据导数的定义，要使

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x)^{a-1}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

存在，只要$a>1$即可，因为$a>1$，当$\Delta x\to0$时，就有$(\Delta x)^{a-1}\sin\frac{1}{\Delta x}\to0$。故当$a>1$时，函数$f(x)$在$x=0$处可导，且有$f'(0)=0$。

（3）由于$f'(0)=0$，和当$x\neq0$时有

$$f'(x)=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x},$$

要使导函数$f'(x)$在$x=0$处连续，就应有

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=f'(0)=0,$$

这只要$a>2$就可以了。因为$a>2$，当$x\to0$时，$f'(x)\to f'(0)=0$。故当$a>2$时函数$f(x)$在$x=0$处有连续的导函数。

例 9　设 $f(x)$对一切x 满足 $|f(x)|\leqslant x^2$，证明函数 $f(x)$ 在$x=0$处是可微的。

基本思路　从条件 $|f(x)|\leqslant x^2$ 的特点出发，利用极限的两边夹定理证明函数 $f(x)$在$x=0$处可微。

证明　从条件$|f(x)|\leqslant x^2$不难看出：$f(0)=0$。

将不等式

$$-x^2\leqslant f(x)\leqslant x^2$$

除以 $x(x>0)$，得

$$-\frac{x^2}{x}\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{x^2}{x},$$

或
$$-x\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqslant x,$$

当 $x\to0+0$时，根据两边夹定理，就有

$$f'_+(0)=0.$$

将不等式

$$-x^2\leqslant f(x)\leqslant x^2$$

除以 $x(x<0)$，得

$$-\frac{x^2}{x}\geqslant\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{x^2}{x},$$

或
$$-x\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geqslant x,$$

当 $x\to0-0$ 时，根据两边夹定理，就有

$$f'_-(0)=0.$$

综上所述，函数 $f(x)$ 在$x=0$处左、右导数存在且相等，故函数 $f(x)$在$x=0$处可微。

例10　设 $f(x)$在x_0处是可导的，证明

$$\lim_{h,k\to0+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}=f'(x_0). \tag{1}$$

基本思路　将函数的改变量变形。

证明　已知 $h>0, k>0$。令 $\alpha=\frac{h}{h+k}$，有 $0<\alpha<1$，且

$\frac{k}{h+k}=1-\alpha$。因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，有

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-k)}{h+k}$$

$$=\frac{h}{h+k}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}\frac{k}{h+k}$$

$$=\alpha\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+(1-\alpha)\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}.$$

于是，$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)$$

$$=\alpha\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right]$$

$$+(1-\alpha)\left[\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)\right]$$

$$=\alpha\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'_+(x_0)\right]$$

$$+(1-\alpha)\left[\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'_-(x_0)\right].$$

已知 $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'_+(x_0)\right]=0,$$

$$\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'_-(x_0)\right]=0,$$

则 $$\lim_{h,k\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)\right]=0,$$

即 $$\lim_{h,k\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}=f'(x_0).$$

例11 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 当x\neq 0时, \\ 0, & 当x=0时. \end{cases}$$

在$x=0$处是无穷次可微分的，并画出函数的图象。

基本思路 在$x=0$处利用导数定义和数学归纳法证明其无穷次可微。

证明 因为有 $f(0)=0$和

$$\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0),$$

所以函数 $f(x)$在$x=0$处是连续的。

由于有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0,$$

其中令$\frac{1}{x}=y$，故函数 $f(x)$ 在$x=0$处可微，且 $f'(0)=0$。当$x\neq 0$时，有

$$f'(x)=\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}.$$

而 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=0,$$

故函数 $f(x)$在$x=0$处是二次可微的，且 $f''(0)=0$。当$x\neq 0$时，有

$$f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

应用归纳法，设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是 n 次可微的，且

$f^{(n)}(0)=0$，我们只须证$n+1$时有$f^{(n+1)}(0)=0$即可。

事实上，当$x\neq0$时，$f^{(n)}(x)$总是形如$\dfrac{ce^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$有限项之和（其中$c$是常数，$k$为正整数），由于有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^k}{e^{y^2}}=0\ \left(y=\frac{1}{x}\right),$$

故有

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=0。$$

由于有

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=0,$$

故函数$f(x)$在$x=0$处是$n+1$次可微的，且有$f^{(n+1)}(0)=0$。

综上所述，有$f^{(n)}(0)=0$（$n=1,2,\cdots$），因此说函数$f(x)$在$x=0$处是无穷次可微的。

现在作图。因为

$$f(-x)=f(x),$$

所以它是偶函数。另外易见函数为非负和上方有界的，即

$$0\leqslant f(x)<1。$$

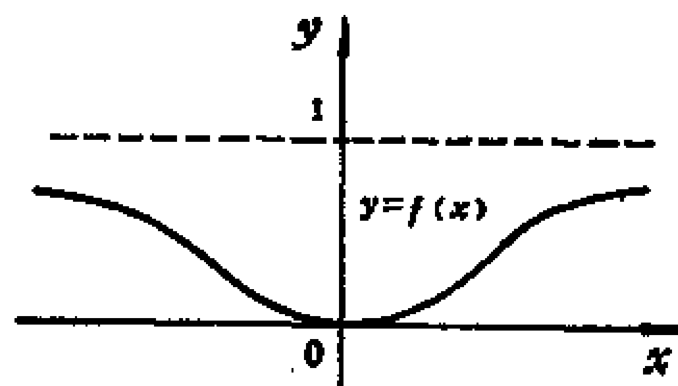


图4.12

最后，因为有

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

所以$y=1$是函数的渐近线。其图象如图4.12.示

例12　某船受一绳索牵引，设绳索在绞盘上卷绕速度为每秒2米，绞盘距水面高为4米，问船在离岸8米处的速度是多少？

基本思路　依绞盘的卷绕速度给出绳索行走的路程公式，

再给出船行走的路程公式，利用导数即可求出行至 8 米处的速度。

解 设 t 是绳索在绞盘上卷绕的时间。则绳索的行走路程公式为

$$S_1 = 2t.$$

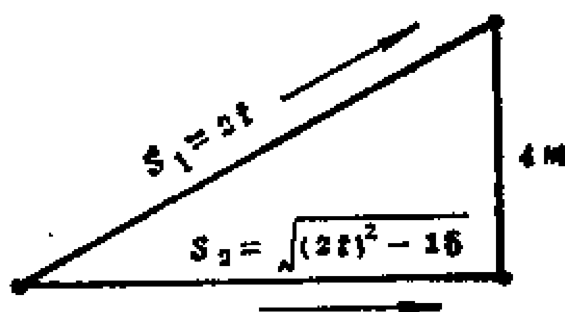


图4.13

如图4.13示，船行走的路程公式为

$$S_2 = \sqrt{(2t)^2 - 16}.$$

而船行至 8 米处的时间应由如下公式给出

$$2t = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

因此 $t = 2\sqrt{5}$.

因为

$$S'_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8t}{\sqrt{(2t)^2 - 16}},$$

所以船行至 8 米处的速度为

$$v = S'_2\big|_{t=2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \frac{8t}{\sqrt{(2t)^2 - 16}}\bigg|_{t=2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{16 \cdot 5 - 16}} = \sqrt{5}.$$

答：船离岸 8 米处的速度为$\sqrt{5}$米/秒。

习　　题

§4.2

1．过曲线$y = x^2$上两点$A(2, 4)$和 $A'(2 + \Delta x,\ 4 + \Delta y)$引割线$AA'$，求此割线的斜率．设 (1) $\Delta x = 1$；(2)$\Delta x = 0.1$；(3)$\Delta x = 0.01$；(4)Δx为某个任意小的数；(5)在已知曲线上点A的切线斜率等于什么？

2．已知函数$f(x) = x^2$，根据导数的定义，求$f'(5)$，$f'(-2)$，$f'(x_0)$．

3．利用导数定义，求下列函数的导数：(1) x^3；(2) $\sqrt[3]{x}$；(3) $\cos x$；

(4) $\operatorname{tg}x$; (5) $a^x (a>0,\ a\neq 0)$.

4. 应用导数定义证明，如果$f(x)=\frac{1}{x^2}$，则$f'(a)=-\frac{2}{a^3}$，$a\neq 0$。

5. 证明：如果函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$当$x=0$时等于零，并存在导数且$\varphi'(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$。

§4.4

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{5}$；　(2) $S=\frac{3t^2+1}{t-1}$；

(3) $\rho=\varphi\cdot\sin\varphi+\cos\varphi$；　(4) $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$；

(5) $y=x\sin x\ln x$；　(6) $y=\frac{\ln x}{x^n}$；

(7) $y=|x-1|$；　(8) $y=\ln|x-1|$

(9) $S=\frac{1}{t^2-3t+6}$；　(10) $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$；

(11) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　(12) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$；

(13) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$；　(14) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$；

(15) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$；　(16) $y=\sin^2\frac{x}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$；

(17) $y=\operatorname{arc\,tg}(x^2)$；　(18) $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$。

7. 已知 $f(x)=x^3$，求：

(1) $f'(9)$，$f'(25)$，$f'(36)$；(2) $f'(3^2)$，$f'(5^2)$，$f'(6^2)$；

(3) $f'(a^2)$，$f'(n^2)$，$f'(x^2)$。

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x^3+2x}{e^x}$；　(2) $y=x^3-3^x+3^3$；

(3) $y=\frac{e^x}{1+x^2}$；　(4) $y=x\sin x\operatorname{arctg}x$；

(5) $y=\frac{1}{\arcsin x}$;　　(6) $y=\frac{\arccos x}{x}$;

(7) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;　　(8) $y=\sin^n x\cos nx$;

(9) $y=\arcsin(\sin x)$;　　(10) $y=e^{-x^2}$;

(11) $y=\sin^2(x+\sin x)^2$;　　(12) $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2\cdot\sin^2 x^2$;

(13) $y=\sin(x^2+\sin(x^2+\sin x^2))$;

(14) $y=\sin\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)}\right)$.

(15) $y=\operatorname{ctg}^2\frac{x+1}{3}+\operatorname{ctg}\frac{x^2+1}{4}$;　　(16) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^3-2x}$;

(17) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(18) $y=\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2 e^{-x}$;

(19) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;　　(20) $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(21) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$;　　(22) $y=10^{x\operatorname{tg}2x}$;

(23) $y=\ln\operatorname{ch}x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2x}$;　　(24) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

(25) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;　　(26) $y=\ln\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$;

(27) $y=\frac{(2x+3)^4\cdot\sqrt{x-6}}{\sqrt[3]{x+1}}$;　　(28) $y=\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$;

(29) $y=\frac{1}{2a}\left(\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\frac{a}{a+x}\right)$;

(30) $y=x-\ln(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1})$;

(31) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\sin x)-x$;

(32) $y=3x^3\cdot\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$;

(33) $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(34) $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$;

(35) $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arcctg}x^6$;

(36) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

(37) $y=\arcsin\left(\dfrac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}\right)$;

(38) $y=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$;

(39) $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$;

(40) $y=e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]$;

(41) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$;

(42) $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$;

(43) $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-2x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$;

(44) $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}\ \dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg}a^{-x}$.

§4.5

9. 求下列函数的导数：

(1) $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

(2) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$;

(3) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(4) $y=\log_x a\ \ (a>0)$;

(5) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

(6) $y=\sqrt[x]{x}\ (x>0)$;

(7) $y=x^{x^x}$;

(8) $y=\operatorname{sh}^3 x$;

(9) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)$;

(10) $y=\ln\operatorname{ch}x$;

(11) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$;

(12) $y=\operatorname{th}(\ln x)$.

10. 设$\varphi(x)$和$\psi(x)$为x的可微分函数，求下面函数y的导函数，若

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$;

(2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$, $\varphi(x)\neq 0$, $\psi(x)>0$;

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=[x]$;

(2) $y=\{x\}$;

(3) $y=\operatorname{sgn}x$.

12. 证明：偶函数的导函数是奇函数，而奇函数的导函数是偶函数。

13. 证明：周期函数的导函数仍是周期函数。

14. 二轮船A和B从同一个码头同时出发，A往北B往东行驶，若A船的速度为30仟米/小时，B船的速度为40仟米/小时，问两船之间的距离增加的速度是多少？

§4.6

15. 设$f(a)=g(a)$，且$f(x)$在点a的左导数等于$g(x)$在点a的右导数。定义一个函数$h(x)$：

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当}x\leqslant a\text{时,}\\ g(x), & \text{当}x\geqslant a\text{时,}\end{cases}$$

证明$h(x)$在点a是可导的。

16. 设$\alpha>1$，且$f(x)$满足 $|f(x)|\leqslant|x|^{\alpha}$，证明$f(x)$在$x=0$处可微。

17. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当}x\leqslant x_0\text{时,}\\ ax+b, & \text{当}x>x_0\text{时,}\end{cases}$$

为使函数$f(x)$在点$x=x_0$处既连续又可导，问a和b应取何值？

18. 设 $f(a)=g(a)=h(a)$，对一切x又有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，以及$f'(a)=h'(a)$。证明：$g(x)$在点$a$可导，且有

$$f'(a)=g'(a)=h'(a)。$$

19. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{当}x\neq0\text{时,}\\ 0, & \text{当}x=0\text{时,}\end{cases}$$

在$x=0$处不存在导数。

20. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当}x\neq0\text{时,}\\ 0, & \text{当}x=0\text{时,}\end{cases}$$

有不连续的导函数。

§4.7

21. 已知函数$y=f(x)$在某点x处自变量的改变量$\Delta x=0.2$，对应的函数改变量的线性主部等于0.8，试求在点x处的导数。

22. 求下列函数的微分：

（1） $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$，$a\neq 0$；　　（2） $y=\operatorname{tg}^2 x$；

（3） $y=\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg}x)^2$；　（4） $y=\dfrac{x}{1-x^2}$；

（5） $y=e^{ax}\cos bx$；　　（6） $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

（7） $y=\sin^2 u$，$u=\ln(3x+1)$；

（8） $y=e^{3u}$，$u=\dfrac{1}{2}\ln v$，$v=x^2-2x+5$。

23. 设 u，v，w为x的可微函数，求函数y的一阶微分dy。若：

（1） $y=uvw$；　　（2） $y=\dfrac{uw}{v^2}$；

（3） $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$；　　（4） $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$；

（5） $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$。

24. 利用函数的微分代替函数的改变量，求下列各式之近似值：

（1） $\sqrt[3]{1.02}$；　　（2） $\sin 29^\circ$；

（3） $\operatorname{arctg} 1.05$；　　（4） $\lg 11$。

25. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\doteq a+\frac{x}{na^{n-1}}\ (a>0)，$$

其中要求 $|x|\ll a$. 利用这个公式求下列各式的近似值：

（1） $\sqrt[3]{9}$；　（2） $\sqrt[4]{80}$；　（3） $\sqrt[7]{100}$；　（4） $\sqrt[10]{1000}$.

§4.8

26. 对下列函数求y''.

（1） $y=x\sqrt{1+x^2}$；　　（2） $y=e^{-x^2}$；

（3） $y=x\ln x$；　　（4） $y=\ln f(x)$；

（5） $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

27. 设$f(x)$存在三阶导数，求y''和y'''，若：

（1） $y=f(x^2)$；　　（2） $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

（3） $y=f(e^x)$；　　（4） $y=f(\ln x)$。

28．求下列函数指定阶的导数。

（1） $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求$y^{(100)}$；　　（2） $y=x\operatorname{sh}x$，求$y^{(100)}$；

（3） $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$，求$y^{(n)}$；　　（4） $y=\dfrac{1}{x}e^x$，求$y^{(n)}$；

（5） $y=\cos^2 x$，求$y^{(n)}$；　　（6） $y=\sin ax\sin bx$，求$y^{(n)}$。

§4.9

29．求参数方程的导数。

（1） $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，求y'_x；

（2） $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，　$y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，求$y'_x$；

（3） $x=2t-t^2$，$y=3t-t^3$，求y''_{x^2}，y'''_{x^3}；

（4） $x=a\cdot\cos t$，$y=a\cdot\sin t$，求y''_{x^2}，y'''_{x^3}；

（5） $x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$，求y'_x，y''_{x^2}，y'''_{x^3}。

30．证明由方程组

$$x=2t+|t|,\quad y=5t^2+4t|t|,$$

所确定的函数$y=y(x)$，当 $t=0$ 时可微，但是它的导数不能用普通公式求得。

第五章　中值定理与泰勒公式

我们在第四章里已经给出了导数和微分的概念及其求法。在此基础上，本章将进一步地研究导数和微分的一些重要定理和公式，即微分中值定理和泰勒① 公式。中值定理是微分学中最基本的定理，微分学的许多应用都是建立在中值定理的基础之上的。泰勒公式是微分中值定理的推广，又是研究用多项式逼近函数的重要工具。

§ 5.1　中 值 定 理

在给出中值定理之前，先证明一个重要的辅助性定理——费尔马② 定理。

一　费尔马定理

定义　设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域$U(x_0,\delta)$内有定义。如果对任意的$x\in U(x_0,\delta)$，有

$$f(x_0)\geqslant f(x)\quad (f(x_0)\leqslant f(x)),$$

则称函数$f(x)$在点x_0取极大（小）值$f(x_0)$，称点x_0为极大（小）值点。极大值、极小值统称为**极值**，极大值点、极小值点统称为**极值点**。

如图 5.1示，点x_1，x_3为极大值点，而x_2为极小值点。

定理5.1（费尔马定理）　如果函数$f(x)$在点x_0的某个邻域

① 泰勒：Taylor, B. 英国数学家，1685—1731年。

② 费尔马：Fermat. P. 法国数学家，1601—1665年。

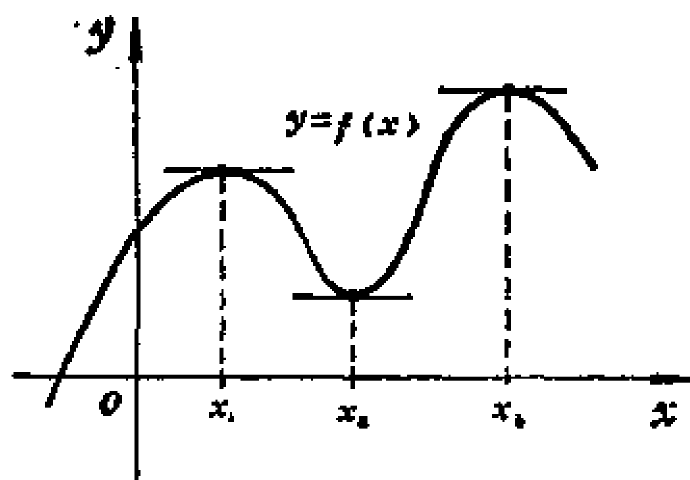


图5.1

$U(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足

（1）$f(x)$在点x_0取极大值或极小值；

（2）$f(x)$在点x_0可导。

则有
$$f'(x_0)=0.$$

费尔马定理有明显的几何意义。如果x_0是函数 $f(x)$ 的极值点，则曲线 $y=f(x)$在点 $(x_0,f(x_0))$切线斜率等于零，即切线平行于x轴。如图5.1示。

证明 仅就极大值 $(f(x_0)\geqslant f(x))$的情形来证明。

条件（2）就是$f'(x_0)$存在，即
$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$$
成立。

而 $f(x_0)\geqslant f(x)$，即 $f(x)-f(x_0)\leqslant 0$. 当任意的$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$x-x_0<0$，则有
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0;$$
当任意的$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$x-x_0>0$，则有
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

极据极限的不等式性质（定理2.13的推论）有：
$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)=f'(x_0)\geqslant 0,$$

和 $$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)=f'(x_0)\leqslant 0.$$

于是，$f'(x_0)$只能等于零，即

$$f'(x_0)=0. \quad \square$$

定理5.1表明：可微函数$f(x)$在点x_0取极值的必要条件是：$f'(x_0)=0$。

二 中值定理

定理5.2（洛尔[①]定理） 如果函数满足：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）$f(a)=f(b)$。

则在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=0$。

洛尔定理有明显的几何意义，如图5.2示，对于满足定理三个条件的函数$f(x)$，在开区间(a,b)的内部至少有一点ξ，使得过曲线$f(x)$上点$(\xi,f(\xi))$的切线平行于x轴。

证明 因为函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，根据§3.4的最值性定理3.7，所以函数$f(x)$在$[a,b]$上取到最大值M和最小值m。对此分两种情形来讨论：

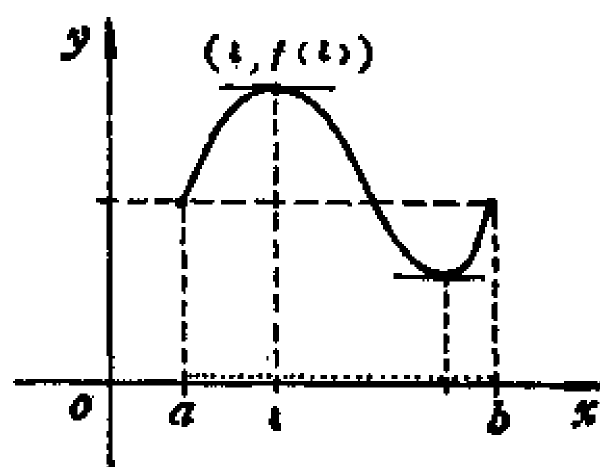


图5.2

如果 $m=M$，则函数$f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于常数M，

① 洛尔：Rolle, M. 法国数学家，1652—1719.

从而它的导数$f'(x)$在这个区间上必为零，故区间(a,b)内的每一点都可以取作ξ，使$f'(\xi)=0$。

如果$m\neq M$，则M与m中至少有一个不等于$f(a)=f(b)$。不妨设$M\neq f(a)=f(b)$，即函数$f(x)$在区间$[a,b]$的端点a和b取不到最大值M. 根据条件（1），在(a,b)内至少存在一点ξ使得$f(\xi)=M$，于是对任意的$x\in[a,b]$有

$$f(\xi)\geqslant f(x),$$

又因为有条件（2），函数$f(x)$在点ξ可导，根据费尔马定理，有$f'(\xi)=0$。 □

定理5.3（拉格朗日[①]定理） 如果函数$f(x)$满足：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导。

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\text{或}\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{5.1}$$

拉格朗日中值定理有明显的几何意义。如图5.3示，公式(5.1)指出，连接点$A(a,f(a))$与点$B(b,f(b))$的弦$\overline{AB}$的斜率$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$等于曲线$y=f(x)$上某一点$P(\xi,f(\xi))$的切线T的斜率。

证明 作辅助函数[②]

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

由于函数$f(x)$满足定理的条件（1）和（2），而且函数$\varphi(x)$由函数$f(x)$与一个线性函数$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$之差所构成，因此$\varphi(x)$满足洛尔定理的前两个条件。当用$x=a$和$x=b$

① 拉格朗日：lagrange, J.L.法国数学家，1736—1813年。

② 关于辅助函数，详见本章后面的“说明”。

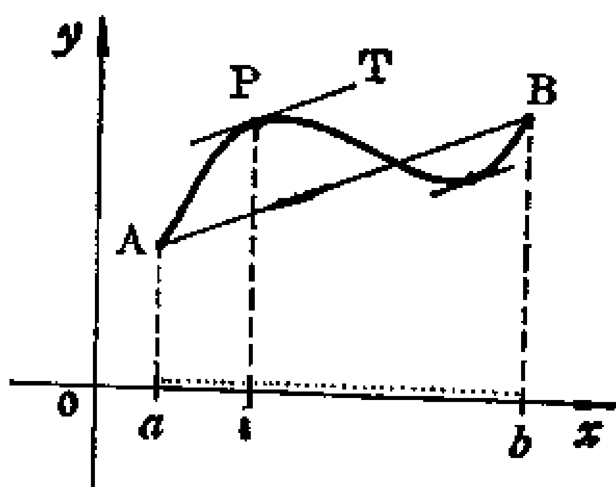


图5.3

代入$\varphi(x)$时，得 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$。即 $\varphi(x)$ 又满足洛尔定理的第三个条件。于是在 (a,b)内至少存在一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$。又因为

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以有

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$ □

公式（5.1）叫做拉格朗日公式。它在微分学中占有极其重要的地位，今后将不止一次地应用它。下面给出拉格朗日公式的另外两种形式：

如用x_0代替a，用$x_0+\Delta x$代替 b，则有$b-a=\Delta x$，这时公式（5.1）可改写成

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x, \tag{5.2}$$

其中ξ 位于x_0与$x_0+\Delta x$ 之间。

有时把点ξ写成

$$\xi=x_0+\theta\Delta x,$$

其中的 θ是介于0与1之间的某一个数，于是公式（5.2）又

可改写成

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\ 0<\theta<1. \tag{5.3}$$

在§4.3的例1中曾指出："常数的导数等于零"。它的逆命题也成立，即

推论1 如果函数 $f(x)$ 在(a, b) 内有 $f'(x)\equiv 0$，则在(a,b)内 $f(x)$为常数。

证明 在区间(a,b)内任取两点 $x_1<x_2$。显然函数 $f(x)$在闭区间 $[x_1,x_2]$上满足拉格朗日定理的条件，因此有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,x_2),$$

由已知条件知，对任意的 $x\in(a,b)$，有$f'(x)\equiv 0$，于是

$$f(x_2)-f(x_1)=0,\ 即\ f(x_2)=f(x_1).$$

由于 x_1，x_2的任意性，就证明了函数在(a,b)内为一常数。□

推论2 如果对任意的$x\in(a,b)$ 有 $f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内有 $f(x)=g(x)+c$ （c为一常数）。

证明 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设知

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0,$$

再根据推论1知，$\varphi(x)\equiv c$ （c 为一常数），于是有

$$f(x)=g(x)+c.$$ □

推论2表明：两个函数，如果导数相等，那么它们之间只差一个常数。

定理 5.4（柯西定理） 如果两个函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）在开区间 (a,b)内 $\varphi'(x)\neq 0$。

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \tag{5.4}$$

证明 首先应当指出：（5.4）式的左端分母 $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$。如假设 $\varphi(b)-\varphi(a)=0$，即$\varphi(a)=\varphi(b)$，$\varphi(x)$ 就满足

洛尔定理的所有条件，因此，在 (a,b)内至少存在一点 η，使 $\varphi'(\eta)=0$，这与已知条件（3）相矛盾。

与拉格朗日定理的证明类似，在此引进辅助函数

$$F(x)=\psi(x)-\psi(a)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x)-\varphi(a)).$$

因为函数$\psi(x)$和 $\varphi(x)$都满足洛尔定理的前两个条件，又根据辅助函数$F(x)$的构成形式，所以知函数 $F(x)$也满足洛尔定理的前两个条件。将$x=a$和$x=b$分别代入 $F(x)$，得 $F(a)=F(b)=0$。因此，$F(x)$满足洛尔定理的所有条件，故在 (a,b)内至少存在一点ξ，使 $F'(\xi)=0$。又因为

$$F'(x)=\psi'(x)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

所以有

$$F'(\xi)=\psi'(\xi)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=0,$$

移项得

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$ □

柯西中值定理的几何意义也是比较明显的，只不过将定理中的自变量x改写成 t。于是，

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad a\leqslant t\leqslant b, \end{cases}$$

看作某一条曲线的参数方程。这时$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$表示联接曲线两端点$A$，$B$的弦的斜率。而$\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$表示这个曲线上某一点$c(\varphi(\xi),\psi(\xi))$的切线斜率（如图5.4）。公式（5.4）表明，在定理所给的条件下，由参数方程表示的曲线上至少存在一点c，使之过这点的切线平行于联接端点的弦$\overline{AB}$。

当 $\varphi(t)=t$ 时，原来的参数方程变成

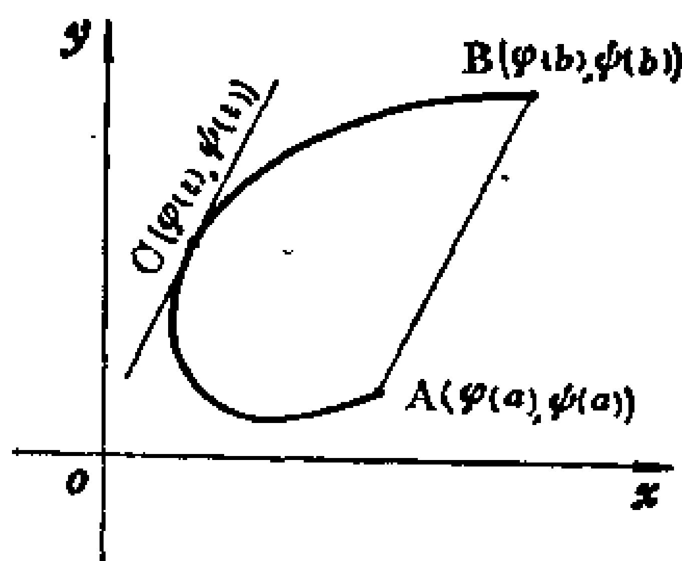


图5.4

$$\begin{cases} x = t \\ y = \psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

或 $$y = \psi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

这时公式（5.4）就变成公式（5.1）了．因此，柯西定理是拉格朗日定理的推广．

三　举　例

例1　不用求出函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

的导数，证明方程 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实根．

证明　由于函数$f(x)$在区间〔1,2〕和〔2,3〕上连续且可导，又有$f(1)=f(2)=f(3)=0$，因此函数$f(x)$在区间〔1,2〕和〔2,3〕上满足洛尔定理的所有条件，故存在点ξ_1和ξ_2（$1<\xi_1<2<\xi_2<3$），使之

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0,$$

即方程 $f'(x)=0$有两个不相等的实根．

例2　证明方程 $x^3-3x+c=0$在区间〔0,1〕内不可能有两个不相等的实根．

证明　设 $f(x)=x^3-3x+c$．　　有

$$f'(x)=3x^2-3.$$

如令 $f'(x)=3x^2-3=0$，解得 $x=\pm1$，则 $x=1$ 是方程 $f'(x)=0$ 在区间 $[0,1]$ 上根，于是方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内无实根。

假设方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 内有两个不相等的实根 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$，即 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$。显然，函数 $f(x)=x^3-3x+c$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上满足洛尔定理的条件，故存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$f'(\xi)=0,$$

即方程 $f'(x)=0$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 内（当然也在区间 $(0,1)$ 内）存在一个实根 ξ 与方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内无实根矛盾。于是方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 内不可能有两个不相等的实根。

例 3 证明不等式

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b},\quad 0<b<a.$$

证明 设 $f(x)=\ln x$。显然它在闭区间 $[b,a]$ 上连续，且在开区间 (b,a) 内可导。应用拉格朗日定理得

$$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),$$

其中 $\xi\in(b,a)$。

由于 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，故得 $\frac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{b}$。

即
$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

例 4 证明恒等式

$$\operatorname{arctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

证明 设 $f(x)=\operatorname{arctg}x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。只须证当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$f(x)=0$。因为

$$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

根据定理5.3的推论1，所以在区间 $(-\infty, +\infty)$上，$f(x) = c$（c是一常数）。又因为

$$f(0) = \text{arctg}0 - \arcsin\frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0,$$

即当 $x=0$时，$f(0) = c = 0$，得

$$f(x) = \text{arctg}x - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

即 $$\text{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例5 如果函数 $f(x)$在$[0,1]$上可导，且$|f'(x)| < 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0).$$

证明 已知 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上可导，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$上连续，且在$\left(0, \frac{1}{n}\right)$内可导（$n = 1, 2, \cdots\cdots$）。根据拉格朗日定理，存在 $\xi_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$，使

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = f'(\xi_n)\left(\frac{1}{n} - 0\right), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

即 $$f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = \frac{1}{n} f'(\xi_n).$$

由条件 $|f'(x)| < 1$，知

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right| = \frac{1}{n}|f'(\xi_n)| < \frac{1}{n},$$

当 $n\to\infty$时，$f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$，即

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0).$$

例 6 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，则存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

证明 **证法 1** 作辅助函数

$$\varphi(x)=x^2[f(1)-f(0)]-f(x).$$

由于有 $\varphi(1)=\varphi(0)=-f(0)$，因此函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足洛尔定理的条件。于是，存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$\varphi'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]-f'(\xi)=0,$$

得

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

证法 2 设 $g(x)=x^2$。于是，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且在 $(0,1)$ 内，$g'(x)=2x\neq0$，根据柯西定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

得

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

§ 5.2 洛比达法则

在第二章里，我们曾讨论过两个无穷小量（或无穷大量）之比的极限，例如，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ 等等.$$

本节将介绍一种简便而有效的求不定型 $\frac{0}{0}\left(或\frac{\infty}{\infty}\right)$ 的极限的方法，这就是所谓的**洛比达法则**。①

---

① 洛比达：L'Hospital, G.F. 法国数学家，1661—1704年。

一 不定型$\frac{0}{0}$的求值法

定理 5.5 如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：

（1） $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$；

（2） 在点 a 的某个邻域内（但点 a 除外）处处可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在。

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$也存在，且有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.5}$$

证明 由条件（1）可知，点a 或是 $f(x)$和$g(x)$ 的连续点或是可去间断点。当 a是连续点时，有 $f(a)=g(a)=0$；当a是可去间断点时，可以通过补充定义或改变点a 的函数值的方法，使之这两个函数在点 a 处连续，这只须令 $f(a)=g(a)=0$即可。

再根据条件（2）可知，函数 $f(x)$和 $g(x)$在点a 的某个邻域内处处连续。

设x 为该邻域内的任意一点（但$x\neq a$），在以 x 和 a 为端点的闭区间上，函数 $f(x)$和 $g(x)$满足柯西定理的所有条件，故得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中的ξ介于 x与 a之间（这里的 $g(x)\neq 0$，否则有 $g(x_1)=0$，及 $g(a)=0$，应用洛尔定理可推出与$g'(x)\neq 0$相矛盾的结论）。

当 $x\to a$时，也有 $\xi\to a$，注意条件（3），则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

定理5.5 表明，当$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存

在，且相等．这是通过导数比的极限表现不定型$\frac{0}{0}$极限的一种简便方法．这个法则对于$x\to\infty$的过程也有类似的定理：

定理 5.6 如果函数$f(x)$和 $g(x)$满足：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$；

（2）在区间$(c,+\infty)$上处处可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在．

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$存在，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.6}$$

证明 设$x=\frac{1}{t}$．当$x\to+\infty$时，$t\to 0+0$，此时条件（1）变成

$$\lim_{t\to 0+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0;$$

根据复合函数的可微性，条件（2）就变成函数$f\left(\frac{1}{t}\right)$和$g\left(\frac{1}{t}\right)$在点0的某个右邻域$(0,\delta)$　$(\delta>0)$　内处处可导，且$g'\left(\frac{1}{t}\right)\neq 0$；条件（3）变成

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

存在．于是，函数$f\left(\frac{1}{t}\right)$和 $g\left(\frac{1}{t}\right)$满足定理5.5 的所有条件，应用公式（5.5）得

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)},$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ □

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos x=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以是$\dfrac{0}{0}$型．由公式(5.5)得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1}=0.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}$.

解 它是$\dfrac{0}{0}$型，由公式(5.5)得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

解 它是$\dfrac{0}{0}$型，由公式(5.5)得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln\sin x)'}{[(\pi-2x)^2]'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{ctg}x}{4(\pi-2x)},$$

不难发现，上式的右端的极限又是$\frac{0}{0}$型，再次应用公式（5.5）得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{ctg}x}{4(\pi-2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(-\text{ctg}x)'}{4(\pi-2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\csc^2x}{-8}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{8\sin^2x}=-\frac{1}{8}.$$

于是有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=-\frac{1}{8}.$$

例 3 表明，确实存在这种情况，极限$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$是$\frac{0}{0}$型，应用一次洛比达法则之后，极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$又是$\frac{0}{0}$型．如果$f'(x)$与 $g'(x)$在点a邻域满足定理5.5的条件，且$\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$存在，则可再次的应用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

更一般地，如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \cdots, \lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$皆为$\frac{0}{0}$型，且$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^{x}+e^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{3(e^{x}-1)^{2}e^{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-3e^{x}+3+x}{3(e^{x}-1)^{2}} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}-3e^{x}+1}{2(e^{x}-1)e^{x}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2xe^{x}-e^{x}+1}{e^{x}-1}\cdot\frac{1}{e^{x}}\right] \qquad \left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-e^{x}+1}{e^{x}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+e^{x}}{e^{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

二　不定型$\frac{\infty}{\infty}$的求值法

定理 5.7　如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

（2）在点 a 的某个邻域内（但点 a 除外）处处存在导数，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在。

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也存在，且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.7}$$

本定理的证明从略。

对于 $x\to\infty$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ 的情况也有类似的定理，这里不再重述。

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$.

解 它是$\dfrac{\infty}{\infty}$型的，由公式（5.7）得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos3x\cdot\sin3x}{-6\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin6x}{\sin2x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos6x}{2\cos2x}=\frac{-6}{-2}=3.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}$，$a>1$，$\alpha>0$.

解 由于 $a>1$，所以当 $x\to+\infty$时，该极限是$\dfrac{\infty}{\infty}$型的，用洛比达法有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a},$$

不难发现，上式右端仍是$\dfrac{\infty}{\infty}$型的，可继续使用洛比达法则，且对任意常数α，总存在自然数n（即使用洛比达法则的次数），使$\alpha-n\leqslant0$。于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x(\ln a)^n}$$

$$=0.$$

三　其它不定型的求值法

除了上述两种类型外，还有不定型 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，

∞^0 等.

（1）当$x\to a$（或$x\to\infty$）时，如果$f(x)\to 0$，$g(x)\to\infty$，则由$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ 或 $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$，可将不定型 $0\cdot\infty$ 化为不定型$\dfrac{0}{0}$或不定型$\dfrac{\infty}{\infty}$。

（2）当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，如果 $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$，则由

$$f(x)-g(x)=\frac{\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

可将不定型$\infty-\infty$化为不定型$\dfrac{0}{0}$。

（3）对于不定型0^0，1^∞，∞^0，可改写为

$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$，

将它们化为不定型 $0\cdot\infty$，通过（1）又可化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型。

由于上述五种不定型均可化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，因此，求它们的极限也可用洛比达法则。

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha\ln x$，$\alpha>0$。

解 因为它是 $0\cdot\infty$型，通过 $x^\alpha\cdot\ln x=\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\alpha}}$将不定型$0\cdot\infty$化成不定型$\dfrac{\infty}{\infty}$，所以应用洛比达法则得

$$\lim_{x\to 0+0}x^\alpha\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=0.$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

解　由于它是$\infty-\infty$型的，通分

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\ \sin x}.$$

它是$\frac{0}{0}$型。因此，应用洛比达法则得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$.

解　因为它是0^0型，由于 $x^x=e^{x\ln x}$,所以有

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}.$$

由例 7，知 $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=0$, 得

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=e^0=1.$$

例10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解　因为它是1^∞型，由于$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$

所以有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}.$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2(2\sin x+x\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2(3\cos x-x\sin x)}=-\frac{1}{6},$$

从而有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

例11　求 $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解　因为它是∞^0型，由于 $(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\operatorname{ctg}x}$，

所以有

$$\lim_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{\ln x}\ln\operatorname{ctg}x}.$$

而

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\ \operatorname{ctg}x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-\frac{1}{\operatorname{ctg}x\sin^2x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}-\frac{x}{\cos x\sin x}=-1,$$

从而有

$$\lim_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

上述诸例表明：求七种不定型极限，洛比达法则是一种简便而有效的方法。因此说，洛比达法则是求不定型极限的有力工具。然而，对某些不定型的极限，使用洛比达法则也并非简单。

例12　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解　用洛比达法则求。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2x+e^{\sin x}\sin x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}\cos^3 x+e^{\sin x}\cdot 2\sin x\cos x+e^{\sin x}\cos x\sin x+e^{\sin x}\cos x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\cos x}+3e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}\cos^2 x+e^{\sin x}\right)$$

$$=1.$$

用通常方法求。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x},$$

如令 $y=x-\sin x$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1\quad（见§3.5的例6），$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=1.$$

例12表明，确实存在这样的例子，用洛比达法则求其极限还不如用通常方法简便。

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解 不能用洛比达法则求．否则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

而等式右端的极限不存在．但是，用通常方法可求得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

例13表明，使用洛比达法则是有条件的．此例虽然是$\frac{0}{0}$型

的，但是它不满足定理5.5的条件（3），所以不能使用洛比达法则。

§5.3 泰勒公式

由于有理整函数（即多项式）只包含加、减、乘三种运算，所以在初等函数中它是比较简单的。因此，用多项式近似地表达某些函数，无论对理论研究或实际计算都是很有意义的。如何用多项式近似地表达某个已知函数，且可以达到任意精确的程度，这就是本节所要讨论的泰勒公式。

一 泰勒公式的引出

在§4.7中曾指出，如果函数 $y=f(x)$ 在点x_0可微，且当$\Delta x=x-x_0$ 足够小时，则有

$$f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.11}$$

由于近似公式（4.11）中仅含有 $(x-x_0)$的一次因子，因此叫做一次近似公式。

上式表明，函数 $f(x)$可用 $(x-x_0)$ 的一次多项式

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

近似表示，$f(x)\doteq P_1(x)$. 此时所产生的误差是较 $\Delta x=x-x_0$ 的高阶无穷小. 即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+o((x-x_0)),$$

其中的 $a_0=f(x_0)$, $a_1=f'(x_0)$.

如果要求的近似程度更精确一些，则希望函数 $f(x)$ 可用 $(x-x_0)$的二次多项式

$$P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$$

近似表示，即 $f(x)\doteq P_2(x)$，其中a_0, a_1, a_2 为常数，且所产生的误差是较$(x-x_0)^2$的高阶无穷小，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2).$$

在一般情况下，如果要求的近似程度更精确，连 $(x-x_0)^n$

都需要计算，则希望函数 $f(x)$ 可用 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

近似表示， 即 $f(x)\doteq P_n(x)$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是常数，且所产生的误差是较 $(x-x_0)^n$ 为高阶无穷小，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \tag{5.8}$$

现在的问题是：是否存在 n 次多项式 $P_n(x)$，使之与函数 $f(x)$ 之差是较 $(x-x_0)^n$ 为高阶无穷小呢？即是否存在 $n+1$ 个系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使之公式（5.8）成立呢？如果存在，那么这 $n+1$ 个系数与函数 $f(x)$ 有何关系呢？

显然，当函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续时，在公式（5.8）中，令 $x=x_0$，得

$$a_0=f(x_0).$$

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在一阶导数时，将公式（5.8）对 x 求导

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots na_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$$

令 $x=x_0$，得

$$a_1=f'(x_0).$$

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在二阶导数时，将上面公式对 x 求导

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+$$
$$+n(n-1)\ a_n(x-x_0)^{n-2}+o\left((x-x_0)^{n-2}\right)$$

令 $x=x_0$，得

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$

继续使用上述方法，当函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在 n 阶导数时，令 $x=x_0$，得

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

从而有 $a_0=f(x_0),a_1=\dfrac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$

于是，$(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

我们称 $P_n(x)$为函数 $f(x)$在点x_0的n次泰勒多项式。

二　泰勒公式

定理 5.8　如果函数 $f(x)$在点 x_0 存在直至n阶导数①，则对任意的 $x\in U(x_0,\delta)$有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{5.9}$$

或　　$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$，

其中 $R_n(n)=o((x-x_0)^n)$ 称为**皮亚诺②型余项**，公式(5.9)称为**泰勒公式**，亦称函数 $f(x)$在点 x_0 的n阶**泰勒展开式**。

证明　为了证明 (5.9) 式成立，只须证

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

由于该极限是$\frac{0}{0}$型．为了重复地利用洛比达法则，因此预先给出：

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$
$$=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

---

① 此条件严格地说应当是：函数$f(x)$在 x_0 点的某个邻域$U(x_0,\delta)$内存在直至$n-1$阶导数，即 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$内存在；且函数$f(x)$在点x_0存在n阶导数$f^{(n)}(x_0)$.

② 皮亚诺：Peano,G. 意大利数学家，1858—1932。

$$-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_n'(x)=f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-\cdots-$$

$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1},$$

$$R''_n(x)=f''(x)-f''(x_0)-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2},$$

………………………………………………

$$R_n^{(n-2)}(x)=f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(x_0)-f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)$$

$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$

$$R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

因为有 $R_n(x_0)=R'_n(x_0)=R''_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n-2)}(x_0)=0$，以及当$x\to x_0$时，函数 $(x-x_0)^n$及其直至 $n-2$阶导数都趋向于零，而它的 $n-1$阶导数等于 $n!(x-x_0)$，所以重复 $n-1$次地使用洛比达法则，将得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}.$$

虽然等式右端的极限仍是$\frac{0}{0}$型，但是不能再使用洛比达法则。

这是因为在定理条件中只给出函数 $f(x)$在邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有直至$n-1$阶导数存在，而 n阶导数只在点 x_0 存在，所以函数$R_n(x)$除点x_0外不一定存在 n阶导数．为此，利用函数 $f(x)$的 n 阶导数定义有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{n!}\Big[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-$$

$$-f^{(n)}(x_0)\Big]=0,$$

于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

□

特别地，当 $x_0=0$时，（5.9）式成为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n), \tag{5.10}$$

这个公式称为**马克劳林**① **公式**。

例1 求函数 $f(x)=e^x$ 的马克劳林展开式。

解 因为 $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$，所以有

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1,$$

由公式（5.10），得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

例2 求函数 $f(x)=\sin x$ 的马克劳林展开式。

解 因为 $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

所以有 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0,\cdots$，由公式（5.10），得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}).$$

同理可得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$$

借助于§4.8给出的幂函数和对数函数的高阶导数公式

$$(x^a)^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$$

和 $$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

---

① 马克劳林：Maclaurin, C.英国数学家，1698—1764.

不难得到，函数 $(1+x)^{\alpha}$和 $\ln(1+x)$的马克劳林展开式：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$+o(x^n).$$

三　泰勒公式的余项

皮亚诺余项仅仅表明了，在 $x\to x_0$的过程中余项$P_n(x)\to 0$的极限状态，即一种定性的描述，然而，对给定的 x，用多项式$P_n(x)$近似地表达 $f(x)$，其误差到底有多大，能否达到预先指定的精确程度，皮亚诺余项解决不了这个问题. 为此有必要进一步的对泰勒公式的余项 $R_n(x)$作定量的研究.

设函数 $f(x)$ 在含有点x_0的某个开区间 (a,b) 内存在直至 $n+1$阶连续导数. 由泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \tag{5.11}$$

令　$R_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^p}{n!\,p}Q(x)$,

其中P是任意正整数. 于是，(5.11) 式可写为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+\frac{(x-x_0)^p}{n!\,p}Q(x). \tag{5.12}$$

作辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^p}{n!\,p}Q(x)\right],\tag{5.13}$$

其中x是常数。在以x和x_0为端点的闭区间上讨论函数$F(t)$。不难看到，函数$F(t)$在以x和x_0为端点的闭区间上连续，在开区间内可导，且由（5.12）式，有

$$F(x)=F(x_0)=0.$$

应用洛尔定理，在x与x_0之间存在一点ξ，使

$$F'(\xi)=0.$$

下面计算 $F'(t)$，由（5.13）式，有

$$\begin{aligned}F'(t)&=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)\\&\quad-\cdots\\&\quad-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}\\&\quad-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{p(x-t)^{p-1}}{n!\,p}Q(x).\\&=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^{p-1}}{n!}Q(x).\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}F'(\xi)&=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(x-\xi)^{p-1}}{n!}Q(x)\\&=\frac{(x-\xi)^{p-1}}{n!}[-(x-\xi)^{n-p+1}f^{(n+1)}(\xi)+Q(x)]\\&=0.\end{aligned}$$

因为 $\xi\neq x$，即$x-\xi\neq 0$，所以

$$-(x-\xi)^{n-p+1}f^{(n+1)}(\xi)+Q(x)=0,$$

即
$$Q(x)=(x-\xi)^{n-p+1}f^{(n+1)}(\xi).$$

于是，
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p\ (x-\xi)^{n-p+1},$$

其中 ξ在x与 x_0之间。

正整数P的两种特殊情况最重要。

当 $p=n+1$ 时，有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

或 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

称为拉格朗日余项

当 $p=1$时，有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n$$

或 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n,$$

$$0<\theta<1$$

称为柯西余项。

在公式（5.11）中，当$x_0=0$ 时，并取拉格朗日余项有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\tag{5.14}$$

其中的ξ介于0与 x之间。

在公式（5.11）中，当$n=1$时，并取拉格朗日余项，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0),\quad 0<\theta<1,$$

它与公式（5.3） 完全一样。因此正象本章开头所说的，泰勒公式是微分中值定理的推广

例 3 求函数$f(x)=e^x$的带有拉格朗日余项的马克劳林展开式。

解 因为$f^{(n+1)}(x)=e^x$，所以 $f^{(n+1)}(0+\theta x)=e^{\theta x}$，$0<\theta<1$，利用例1的结果有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

当x在函数e^x的定义域中任意给定后，

有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}=0,$$

这个事实说明，对任意给定的x，只要n充分大，函数e^x与其泰勒多项式$P_n(x)$之差可以充分小。

特别地，取$x=1$，则有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1. \tag{5.15}$$

应用公式（5.15），可以得出e的近似值. 因为

$$R_n(1)=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

当取$n=9$时，所以有

$$R_9(1)<\frac{3}{10!}=\frac{3}{3628800}<0.000001,$$

又算得

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}\doteq 2.718281,$$

用这个数值代之e，其误差不超过0.000001.

例 4 求函数$f(x)=\sin x$的带有拉格朗日余项的马克劳林展开式.

解 因为
$$f^{(2n+3)}(x)=\sin\left[x+(2n+3)\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right],$$

所以 $f^{(2n+3)}(\theta x)=\sin\left[\theta x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right]$，利用例2的结果得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x),$$

其中的余项 $R_{2n+2}(x) \doteq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right]$

$$= (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos\theta x,\quad 0<\theta<1.$$

对任意给定的 x，有

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x)=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos\theta x=0.$$

特别地，当 $n=0$时，有

$\sin x = x$，其误差不超过 $\frac{|x|^3}{3!}$；

当 $n=1$ 时，有

$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{3!}$，其误差不超过$\frac{|x|^5}{5!}$；

当 $n=2$ 时，有

$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，其误差不超过$\frac{|x|^7}{7!}$，等等.

图5.5 给出函数 $f(x)=\sin x$，及近似代替它的多项式（二次的，三次的，四次的和五次的）的图象（只给出 $x\geqslant 0$ 的部分）.

完全类似可以给出函数$\cos x$，$(1+x)^a$，$\ln(1+x)$在点$x=0$的带有拉格朗日余项的泰勒展开式（即马克劳林展开式），其结果见本章的学习指导.

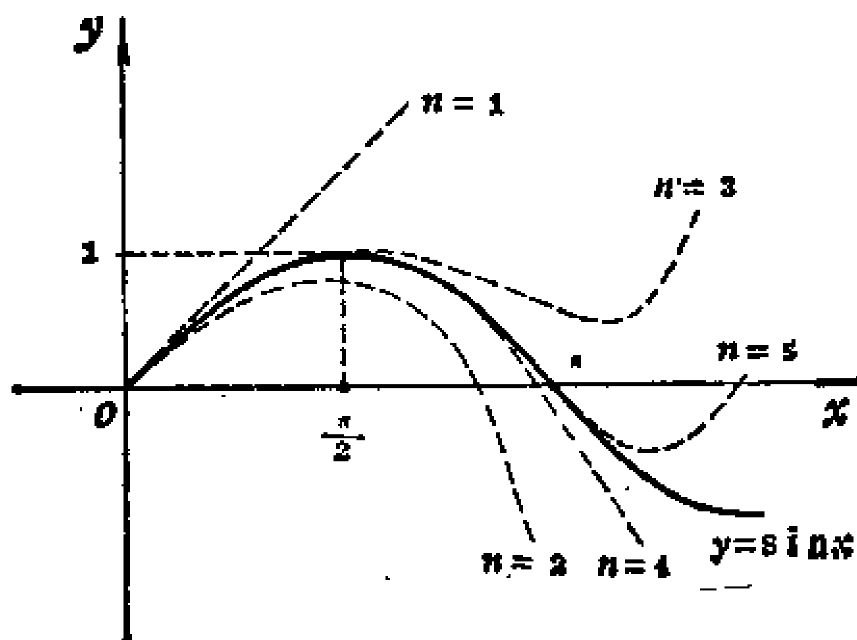


图5.5

学　习　指　导

一　内容概要

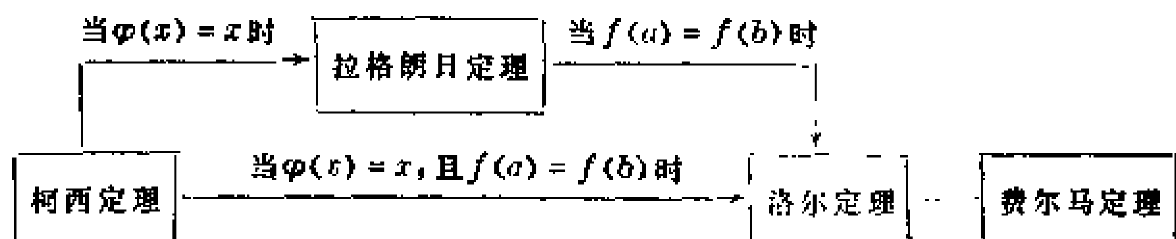
1　重点及要求

中值定理是微分学的理论基础，它是用微分法研究函数性态的很重要的定理。因此要掌握定理的条件、结论以及定理之间的联系。要较熟练地运用这些定理证明有关问题。在这四个定理中，拉格朗日中值定理居于重要地位。

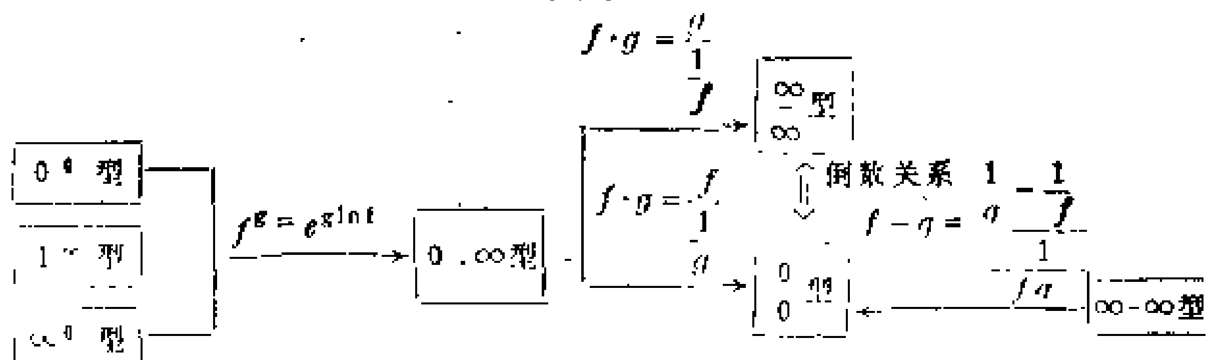
洛比达法则是在函数可微的条件下，求不定型极限的有效方法，因此要较熟练地运用该法则求七种不定型的极限。然而，洛比达法则又不是万能的，一方面它受法则条件的制约，另一方面就是在满足条件的前提下，对某些不定型的极限，用洛比达法则求还不如用通常方法求简便，因此读者要灵活的掌握。

泰勒公式是用多项式近似地表达已知函数的重要工具。无论在理论上还是在实践上都是重要的，并要掌握不同形式余项的公式的条件，及其使用方法。

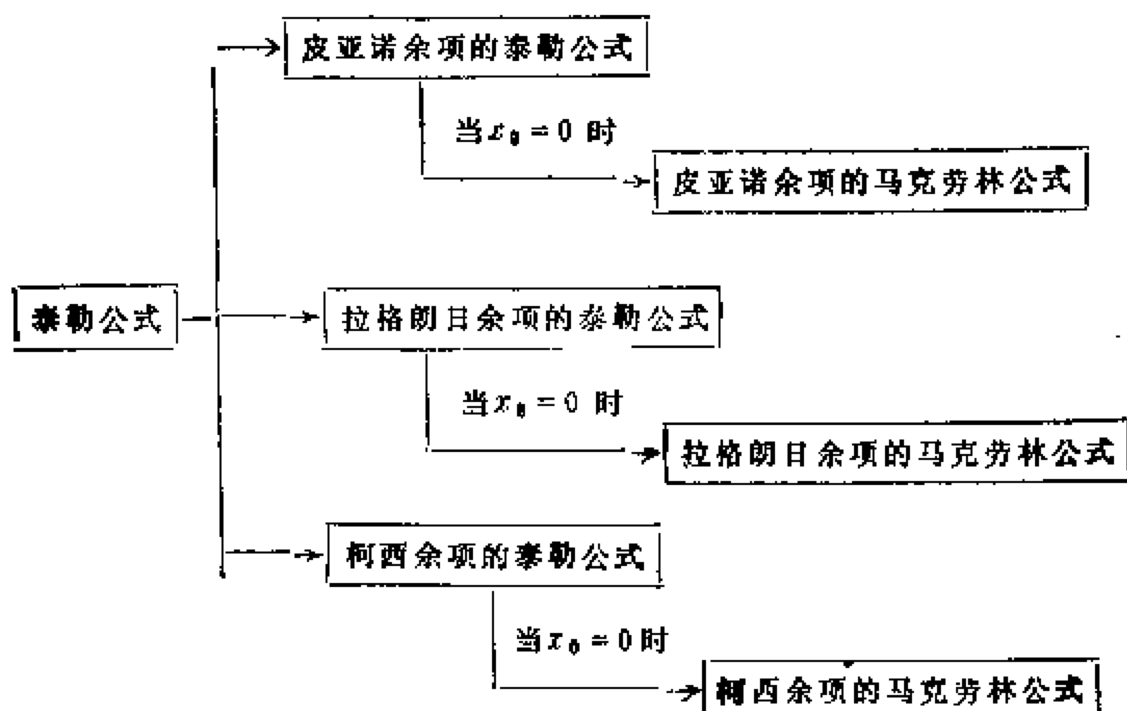
2　中值定理之间的关系



3　七种不定型之间的关系



4 泰勒公式



重要展开式

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$
  - $R_n(x)=o(x^n)$
  - $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x)$
  - $R_{2n+2}(x)=o(x^{2n+2})$
  - $R_{2n+2}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos\theta x$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+R_{2n+1}(x)$
  - $R_{2n+1}(x)=o(x^{2n+1})$
  - $R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$
  - $R_n(x)=o(x)^n$
  - $R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)x^{n+1}}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$
  - $R_n(x)=o(x^n)$
  - $R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$

二　几点说明

1　洛尔定理的三个条件都是重要的，如缺少其中的任何一个，则定理的结论就不一定成立

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0\leqslant x<1\text{时}, \\ 0, & \text{当} x=1\text{时}. \end{cases}$$

如图5.6示。虽然函数 $f(x)$ 在区〔0，1〕上满足洛尔定理的条件（2）和（3），但是它不满足条件（1），即 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=1\neq f(0)=0$。因此在区间（0，1）内不存在点$\xi$，使 $f'(\xi)=0$。

函数 $f(x)=|x|$，$-1\leqslant x\leqslant1$，在区间〔$-1,1$〕上满足洛尔定理的条件（1）和（3），但是它不满足条件（2），即在点$x=0$处函数 $f(x)$不存在导数。因此在区间（$-1,1$）内不存在点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。如图5.7示。

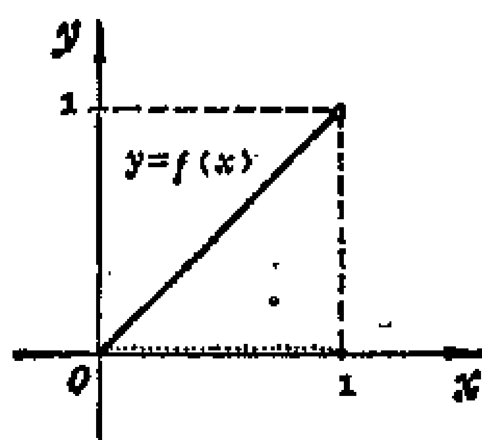


图5.6

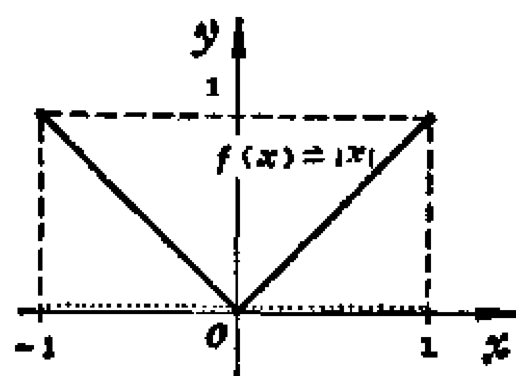


图5.7

函数 $f(x)=x$，$0\leqslant x\leqslant1$，显然该函数区闭〔0，1〕上满足洛尔定理的条件（1）和（2），但是它不满足条件（3），即 $f(0)=0$，$f(1)=1$。因此在区间（0，1）内不存在点ξ，使 $f'(\xi)=0$。如图5.8示。

然而，洛尔定理的条件是充分的。即存在这样的函数，洛尔定理的条件均不满足，但是，在函数的定义域内确存在点ξ，

使 $f'(\xi)=0$。例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & 0\leqslant x<\dfrac{3\pi}{2},\\ -1, & x=\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

如图5.9示.函数 $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 不连续；点 $x=\pi$ 是函数的角点；且 $f(0)=0, f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$，即洛尔定理的三个条件都不满足。但是在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内确存在点 $\xi=\dfrac{\pi}{2}$，函数 $f(x)$ 在点 $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ 处有 $f'(\xi)=0$。

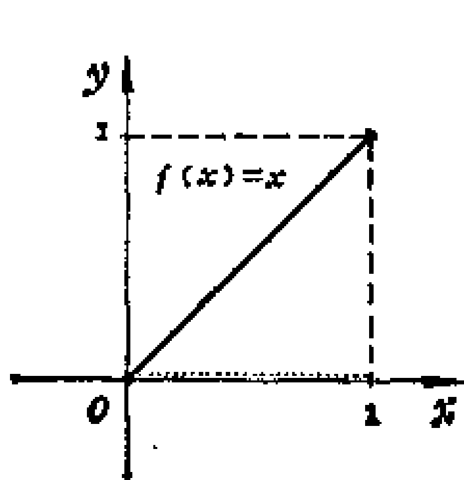


图5.8

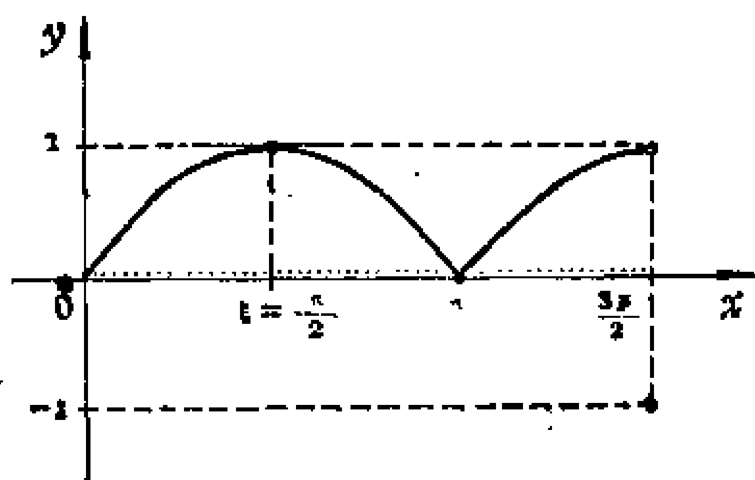


图5.9

2　关于作辅助函数

（1）基本想法

我们知道，拉格朗日中值定理的条件较洛尔定理的条件少一个端点的函数值相等，即 $f(a)\neq f(b)$，因此不能直接运用洛尔定理来证明拉格朗日定理.那么能否构造一个辅助函数 $\varphi(x)$，使之洛尔定理的三个条件都得到满足呢？如果可行，那么，在区间 (a,b) 内寻求点 ξ 使之 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的问题就转化为在区间 (a,b) 内寻求点 ξ 使之 $\varphi'(\xi)=0$。这就是作辅助函数

$\varphi(x)$的基本想法。

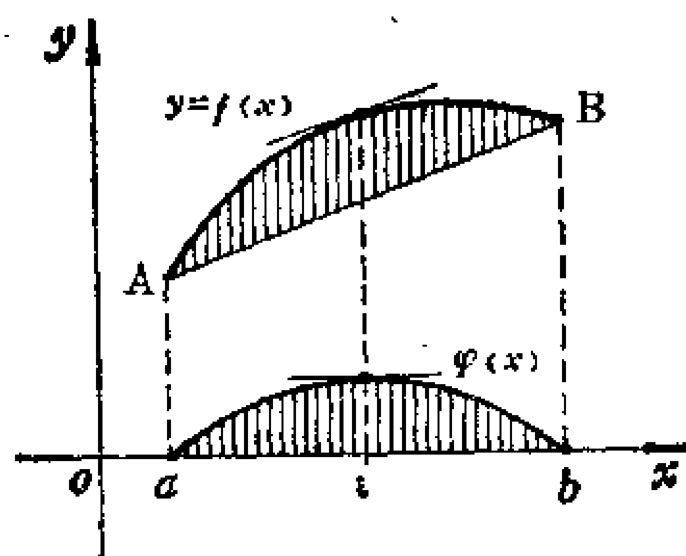


图5.10

（2）具体作法

由于 $f(a)\neq f(b)$，不妨设 $f(b)>f(a)$，如图5.10示，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$是曲线上连接点$A(a,f(a))$与 $B(b,f(b))$ 的割线斜率。因此过A，B两点的直线方程为

$$y_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

从曲线 $y=f(x)$减去直线就得到我们要作的辅助函数，即

$$\varphi(x)=f(x)-y_1=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

显然函数$\varphi(x)$ 满足洛尔定理的条件（3）：$\varphi(a)=0$，$\varphi(b)=0$。

在证明柯西定理时所引入的辅助函数，其基本想法与此类似。

3 再说柯西定理

我们知道，在柯西定理中，对函数$\varphi(x)$和 $\psi(x)$所给的条件，完全满足拉格朗日定理的条件，那为什么不用拉格朗日定

理证明而用洛尔定理证明呢？如果对函数 $\varphi(x)$ 和$\psi(x)$分别应用拉格朗日定理，则得

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi_1)(b-a),\qquad \xi_1\in(a,b),$$
$$\psi(b)-\psi(a)=\psi'(\xi_2)(b-a),\qquad \xi_2\in(a,b),$$

从而有

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi_2)}{\varphi'(\xi_1)}.$$

不难看到，这里的中间值ξ_1和ξ_2未必相同，不能满足公式(5.4)中的中间值 ξ 的要求，这就是柯西定理的优越性。

三　例题选讲

例1　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$ 上可导，且有 $f'(a)\cdot f'(b)<0$，则至少存在一点 $c\in(a,b)$，使之$f'(c)=0$.

基本思路　利用费尔马定理证明.

证明　条件 $f'(a)\cdot f'(b)<0$，亦即 $f'(a)$与 $f'(b)$ 的符号相反，现仅就 $f'(a)<0$，$f'(b)>0$ 的情形予以证明.

$f'(a)<0$，实际上是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

根据函数极限的保号性定理2.13知，存在$\delta_1>0$，使$a+\delta_1<b$，当$x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

因为$x-a>0$，所以 $f(x)-f(a)<0$，即

$$f(x)<f(a),\quad x\in(a,a+\delta_1);\tag{1}$$

$f'(b)>0$，实际上是

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

根据函数极限的保号性定理2.13知，存在 $\delta_2>0$，使 $a<b-\delta_2$，当$x\in(b-\delta_2,b)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

因为 $x-b<0$,所以 $f(x)-f(b)<0$, 即

$$f(x)<f(b), \qquad x\in(b-\delta_2, b). \tag{2}$$

不等式（1）和（2）表明，函数 $f(x)$不在点 a, b 上取最小值. 又因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，根据定理 3.7，所以在区间 (a,b) 内存在一点 c，使之 $f(c)$ 为最小；另外，由已知条件知，函数 $f(x)$在点 c 可导. 由费尔马定理，有

$$f'(c)=0.$$

同样可证 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$ 的情形.

例 2 设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上可导，且有$f'(a)<\mu<f'(b)$，则至少存在一点$c\in(a,b)$，使之 $f'(c)=\mu$.

基本思路 作辅助函数 $g(x)=f(x)-\mu x$，对函数 $g(x)$ 利用例 1 的结果.

证明 作辅助函数. $g(x)=f(x)-\mu x$. 由于函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上可导,因此函数$g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上也可导；又因为 $f'(a)<\mu<f'(b)$，所以对函数$g(x)$有

$$g'(a)=f'(a)-\mu<0,$$

和 $$g'(b)=f'(b)-\mu>0.$$

这样，关于函数$g(x)$完全满足例 1 的条件，于是在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$g'(c)=f'(c)-\mu=0.$$

即 $$f'(c)=\mu.$$

例 3 如果方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$$

有正根 x_0，则方程

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

也有正根x_1，且$x_1<x_0$.

基本思路 利用洛尔定理证明.

证明 设函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. 不难计

算，$f(0)=f(x_0)=0$；由于函数 $f(x)$ 是 n 次多项式，因此在闭区间$[0,x_0]$上连续，在开区间$(0,x_0)$内可导。这样，函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的所有条件。于是在区间$(0,x_0)$内至少存在一点x_1，使

$$f'(x_1)=0,$$

亦即

$$f'(x_1)=na_0x_1^{n-1}+(n-1)a_1x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0,$$

且$0<x_1<x_0$。

例 4　如果 $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，则在区间$(0,1)$内至少存在一点$x_0$，使

$$a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=0.$$

基本思路　利用已知条件 $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，构造函数 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，对函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上应用洛尔定理。

证明　设函数 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$。不难计算，$f(0)=0$，$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$；且函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，即满足洛尔定理的条件。于是，在区间$(0,1)$内至少存在一点x_0，使

$$f'(x_0)=0,$$

亦即

$$f'(x_0)=a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=0.$$

例 5　设n 是偶数，且 $a\neq0$，证明$x^n+a^n=(x+a)^n$仅仅当 $x=0$时成立。

基本思路　用反证法，再利用洛尔定理导致矛盾。

证明　强调n是偶数对结论成立是必要的，否则 $x=-a$ 也

使$x^n+a^n=(x+a)^n$成立。

现证明 $x^n+a^n=(x+a)^n$ 仅当 $x=0$ 时成立。用反证法，假定有$x_0\neq0$（且不妨设 $x_0>0$），使$x_0^n+a^n=(x_0+a)^n$ 成立。在闭区间 $[0,x_0]$上研究函数

$$f(x)=x^n+a^n-(x+a)^n,$$

由于函数是$n-1$次多项式，因此在闭区间$[0,x_0]$上连续，且在开区间$(0,x_0)$内可导；又有

$f(0)=0$，$f(x_0)=x_0^n+a^n-(x_0+a)^n=0$（因假设）。这样，函数 $f(x)$满足洛尔定理的条件。于是，在区间 $(0,x_0)$内至少存在一点 ξ，使之

$$f'(\xi)=n\xi^{n-1}-n(\xi+a)^{n-1}=0,$$

从中解得 $\xi=\xi+a$，这只有 当$a=0$时成立，故与已知条件$a\neq0$矛盾。

例 6 证明，若函数 $f(x)$在闭区间$[x_0,x_0+H]$ $(H>0)$上连续，且在开区间(x_0,x_0+H)内可导，$\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=k$，则函数 $f(x)$在点 x_0存在右导数，且 $f'_+(x_0)=k$。

基本思路 对函数 $f(x)$在闭区间$[x_0,x_0+H]$ $(H>0)$ 上应用拉格朗日定理。

证明 函数 $f(x)$在$[x_0,x_0+H]$ 上满足了拉格朗日定理的条件。于是，当 $0<\Delta x\leqslant H$时，公式（5.3）成立，

即
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x),\quad 0<\theta<1.$$

当 $\Delta x\to0+0$ 时，$x_0+\theta\Delta x\to x_0+0$。 又根据已知条件 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=k$，故上面等式右边的极限也等于$k$， 而左边恰是函数 $f(x)$在x_0点的右导数，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+0}f'(x_0+\theta\Delta x)$$
$$=k.$$

例 7 如果函数 $f(x)$在区间$(a,+\infty)$内可导，且

有
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0,$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

基本思路 在充分远的某个闭区间上应用拉格朗日定理.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，即对任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，存在 X_1 $(>a)$ 当 $x>X_1$ 时，有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导，所以在闭区间 $[X_1,x]$（任意固定的 $x>X_1$）上应用拉格朗日定理

$$\frac{f(x)-f(X_1)}{x-X_1}=f'(\xi),\ \xi\in(X_1,x),$$

且有

$$\frac{|f(x)-f(X_1)|}{x-X_1}=|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

对固定的 X_1，存在 $X_2>X_1$，当 $x>X_2$ 时，又有

$$\frac{|f(X_1)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}\ (f(X_1)\ 为常数).$$

由不等式（3）可知

$$|f(x)-f(X_1)|<\frac{\varepsilon}{2}(x-X_1)$$

从而得 $|f(x)|<|f(X_1)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-X_1).$

将不等式两边除以 x，得

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{|f(X_1)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{x-X_1}{x}\quad\left(\frac{x-X_1}{x}<1\right),$$

故当 $x>X_2$ 时有

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X_2>0$，当 $x>X_2$ 时，有

$$\frac{|f(x)|}{x}<\varepsilon,$$

亦即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

例8 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则必存在一点列 $\{\xi_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，$\xi_n\to+\infty$，且使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$。

基本思路 在区间 $[a,+\infty)$ 内构造闭区间列

$$[x_n,x_{n+1}]\quad(n=1,2,\cdots),$$

在 $[x_n,x_{n+1}]$ 上应用拉格朗日定理.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故对任意固定的 $x_k(x_k\geqslant a)$，如下极限存在：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(x_k)}{x}}{1-\dfrac{x_k}{x}}=0.$$

即，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 X，当 $x>X$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\right|=\left|\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(x_k)}{x}}{1-\dfrac{x_k}{x}}\right|<\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=1$，存在 X_1，可取得 $x_1>X_1$，且 $x_1>a$，使 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\right|<1$；

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，存在 X_2，可取得 $x_2>X_2$，且 $x_2>x_1+1$，使

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|<\frac{1}{2};$$

……

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n+1}$，存在 X_{n+1}，可取得 $x_{n+1}>X_{n+1}$，且 $x_{n+1}>x_n+1$，

使$\left|\dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}\right|<\dfrac{1}{n+1}$,

……。

这样，在区间$(a, +\infty)$内得到闭区间列

$$[x_n, x_{n+1}],\quad (n=1, 2, \cdots).$$

因为函数$f(x)$在区间$(a, +\infty)$内可导，所以在闭区间列上应用拉格朗日定理，得

$$\left|\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}\right|=|f'(\xi_n)|<\frac{1}{n+1},\quad \xi_n\in(x_n, x_{n+1}).\tag{4}$$

由于

$$x_{n+1}>x_n+1>x_{n-1}+2>\cdots>n+x_1,$$

因此当$n\to\infty$时，有$x_n\to+\infty$，$\xi_n\to+\infty$, 和

$$f'(\xi_n)\to 0\quad(\text{由不等式 (4)}),$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0.$$

于是，存在点列$\{\xi_n\}$, 当$n\to\infty$时，有$\xi_n\to+\infty$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$.

例 8 表明：例 7 的逆命题是不成立的，也就是说，根据归结原则，从$\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$不能推得$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。而例 9 却给出了使得它成立的充分性的命题。

例 9　如果函数$f(x)$在区间$(a, +\infty)$内可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

基本思路　在充分远的某个闭区间上应用拉格朗日中值定理，并求其极限。

证明　任取$x\in(a, +\infty)$。因为函数$f(x)$在区间$(a, +\infty)$内可导，所以函数$f(x)$在区间$[x, x+1]$上满足拉格朗日定理的条件，得

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(\xi_x),\ \xi_x\in(x,x+1). \quad (5)$$

当 $x\to+\infty$时，有 $\xi_x\to+\infty$，对（5）式两端取极限，有

$$\lim_{\xi_x\to+\infty} f'(\xi_x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0.$$

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在，于是

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

例10　如果函数 $f(x)$满足：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在(a,b)内可导；（3）非线性函数，则在区间(a,b)内至少存在一点 c_0，使

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|<|f'(c_0)|.$$

基本思路　首先，如图5.11示，将曲线的弦$\overline{AB}$的斜率$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$放大及缩小成

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

再对两端应用拉格朗日定理.

证明　如图5.11示，弦$\overline{AB}$的直线方程为

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

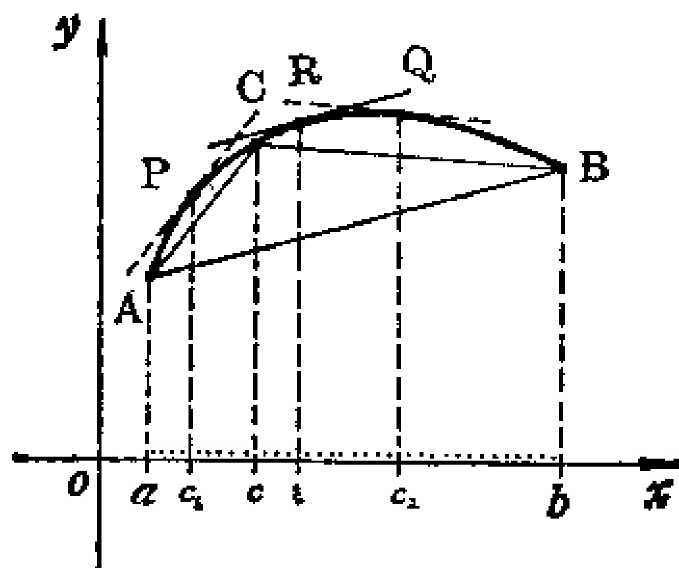


图5.11

显然，$g(a)=f(a)$，$g(b)=f(b)$。

由条件（3）知

$$f(x)\not\equiv g(x),$$

故在区间(a,b)内至少存在一点c，使之$f(c)\neq g(c)$，不妨设$f(c)>g(c)$，再利用条件$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$，则有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{g(c)-g(a)}{c-a}$$

和
$$\frac{g(b)-g(c)}{b-c}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

另外，因为$\overline{AB}$是直线，所以该直线的斜率与各分段直线的斜率都相等，从而有

$$\frac{g(c)-g(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{g(b)-g(c)}{b-c}.$$

综合上面两个不等式，故得

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{g(c)-g(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{g(b)-g(c)}{b-c}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

对函数$f(x)$在区间$[a,c]$和$[c,b]$上应用中值定理，必存在点$c_1\in(a,c)$和$c_2\in(c,b)$，使

$$f'(c_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$=f'(c_2).$$

当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$时，有

$$f'(c_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0,\ \text{取}\ c_4=c_1$$

当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$时，有

$$f'(c_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0,\ 取\ c_0=c_2$$

于是，(a,b)内至少存在一点 c_0，使

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|<|f'(c_0)|.$$

例10的几何意义表明，曲线上弦 $\overline{AB}$的斜率（即过点$R(\xi, f(\xi))$ 切线斜率）必介于弦$\overline{AC}$ 的斜率（即过点 $p(c_1,f(c_1))$ 切线斜率）与弦$\overline{CB}$的斜率（即过点 $Q(c_2,f(c_2))$ 切线斜率）之间。

例11　如果函数 $f(x)$满足：（1）在$[a,b]$上连续；（2）在 (a,b) 内二次可微；（3）$f(a)=f(b)=0$；（4）$f(c)>0$，$c\in(a,b)$，则在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使之$f''(\xi)<0$。

基本思路　在区间 (a,b)内构造一个闭区间，使之导函数在该闭区间的端点值不相同，再应用拉格朗日定理。

证明　由条件（1），（2）和（3），应用洛尔定理，在区间 (a,b)内至少存在一点ξ_1，使之 $f'(\xi_1)=0$。

条件（4）给出 $f(c)>0$，$c\in(a,b)$。如果点 $c\leqslant\xi_1$，则在区间$[a,c]$上应用拉格朗日定理得

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(a,c),$$

且 $f'(\xi_2)>0$。于是，在闭区间 $[\xi_2,\xi_1]$上又满足拉格朗日定理的条件，再次应用拉格朗日定理得

$$\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=f''(\xi),\qquad \xi\in(\xi_2,\xi_1),且f''(\xi)<0\ .$$

如果点 $c>\xi_1$，则在区间$[c,b]$上应用拉格朗日定理得

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_3),\qquad \xi_3\in(c,b),$$

且 $f'(\xi_3)<0$。于是，在闭区间 $[\xi_1,\xi_3]$上又满足拉格朗日定理的条件，再次应用拉格朗日定理得

$$\frac{f'(\xi_3)-f''(\xi_1)}{\xi_3-\xi_1}=f''(\xi),\quad \xi\in(\xi_1,\xi_3),$$

且 $f'(\xi)<0$。

总之，不论那种情况，在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使之 $f''(\xi)<0$。

例12　如果函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[a,b]$上满足$|f'(x)|\geqslant|g'(x)|$，且 $f'(x)\neq0$，则 $|\Delta f(x)|\geqslant|\Delta g(x)|$，$x\in[a,b]$。

基本思路　在区间$[a,b]$ 内的任意的闭区间上应用柯西定理。

证明　所给函数满足柯西定理的所有条件，且在$[a,b]$ 上任取x，使之$x+\Delta x\in[a,b]$，于是在区间 $[x,x+\Delta x]$ 上应用柯西定理，则在$(x,x+\Delta x)$内至少存在一点ξ，使之

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}.$$

又因为$|f'(x)|\geqslant|g'(x)|$，$x\in[a,b]$，且 $f'(x)\neq0$。 $\xi\in(x,x+\Delta x)\subset[a,b]$，所以有

$$\left|\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}\right|=\left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\right|\leqslant1.$$

故得

$$|g(x+\Delta x)-g(x)|\leqslant|f(x+\Delta x)-f(x)|$$

亦即　　$|\Delta g(x)|\leqslant|\Delta f(x)|$。

例13　如果函数 $f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上可导，且$x_1\cdot x_2>0$，则

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中的 $\xi\in(x_1,x_2)$。

基本思路　构造两个函数，在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用柯西定理。

证明　设 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$\psi(x)=\dfrac{1}{x}$，因函数 $f(x)$ 在 $[x_1,$

$x_2]$上可导，且 x_1, x_2同号，所以函数 $\varphi(x)$和$\psi(x)$在 $[x_1, x_2]$皆可导，以及$\psi'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$。由柯西定理知

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)};$$

又因为 $\dfrac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}} = \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)};$$

和

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi);$$

所以得 $\dfrac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$。

例14 如果函数 $f(x)$存在二阶导数，则

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

基本思路 先利用洛比达法则，然后利用二阶导数的定义。

证明 因为函数 $f(x)$存在二阶导数，所以 $f(x)$就连续，当 $h\to 0$时，有 $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$，于是此极限为$\dfrac{0}{0}$型的，应用洛比达法则得

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

在证明此例时须注意：洛比达法则只能用一次，然后用二阶导数的定义。假如连续两次使用洛比法则，则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2},$$

由于只知函数 $f(x)$ 存在二阶导数，而不知道二阶导函数连续，因此不能继续求极限。

例15　将多项式 $p_3(x)=x^3+4x^2+1$ 表成形如 $x-1$ 的正整数幂的多项式。

基本思路　实际上是将函数 $p_3(x)$ 在 $x_0=1$ 处表为泰勒展开式。

解　因为

$$p_3(x)=x^3+4x^2+1,$$

$$p'_3(x)=3x^2+8x,$$

$$p''_3(x)=6x+8,$$

$$p'''_3(x)=6,$$

$$p_3^{(k)}(x)=0\quad(k\geqslant 4).$$

所以　$p_3(1)=6, p'_3(1)=11, p''_3(1)=14, p'''_3(1)=6$. 由公式(5.9)得

$$x^3+4x^2+1=6+11(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$=6+11(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3.$$

例16　求函数 $f(x)=\text{arctg}x$ 在点 $x=0$ 带有皮亚诺余项的泰勒展开式。

基本思路　利用公式（5.9），但是求函数在点 $x=0$ 的 n 阶导数时，须用莱布尼兹公式建立递推公式。

解　函数 $f(x)=\text{arctg}x$ 的导数为

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

由此得

$$f'(x)\cdot(1+x^2)=1. \qquad (6)$$

利用来布尼兹公式对等式（6）求 n 阶导数得：

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0,$$

当$x=0$时，将得到如下的递推公式

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0),\quad n=1,2,\cdots,$$

由于 $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, 再利用递推公式可求

$$f'''(0)=-2,\ f^{(4)}(0)=0,\cdots,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!,\cdots,$$

代入公式（5.9），于是有

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$+o(x^{2n+2}).$$

例17　求函数 $f(x)=x^2\ln x$ 在点 $x=1$带有拉格朗日余项的泰勒展开式($n>3$)。

基本思路　利用公式（5.11）。

解　因为

$$f'(x)=2x\ln x+x,\quad f''(x)=2\ln x+3,$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x},\ f^{(4)}(x)=\frac{2(-1)^3}{x^2},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{2(-1)^4(5-3)!}{x^{5-2}},\cdots,$$

$$f^{(m)}(x)=\frac{2(-1)^{m-1}(m-3)!}{x^{m-2}},\cdots,$$

其中的 $m>3$, 所以有

$$f(1)=0,\ f'(1)=1,\ f''(1)=3,\ f'''(1)=2,\ f^{(4)}(1)=-2,$$
$\cdots$,

代入公式（5.11）得

$$f(x)=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{12}(x-1)^4+\cdots$$

$$+\frac{2(-1)^{n+1}(n-3)!}{n!}(x-1)^n+$$

$$+\frac{2(-1)^n(n-2)!}{(n+1)![1+\theta(x-1)]^{n-1}}(x-1)^{n+1}.$$

例18 利用泰勒公式计算：

（1）$\sin 1°$，准确到10^{-8}；（2）$\lg 11$，准确到10^{-5}。

基本思路 应用拉格朗日余项的马克劳林公式，并估计余项的误差。

解（1）因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos\theta x$，所以 $\sin 1° = \sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+3}\cos\frac{\theta\pi}{180}$，$0<\theta<1$。

为使 $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+3}\cos\frac{\theta\pi}{180}\right| < \frac{1}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+3} < 10^{-8}$ 当 $n=1$ 时，就有

$$\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 \doteq 10^{-11}\cdot(0.13) < 10^{-8},$$

故
$$\sin 1° = \sin\frac{\pi}{180} \doteq \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3$$
$$\doteq 0.017453292 - \frac{1}{3!}(0.017453292)^3$$
$$\doteq 0.01745241.$$

（2）因为

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
$$+ (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}, 0<\theta<1,$$

$$\lg(1+x) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\ln(1+x),$$

和 $\lg 11 = \lg 10\cdot(1.1) = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \frac{1}{\ln 10}\ln 1.1.$

所以有

$$\lg 11 = 1 + \frac{1}{\ln 10}\left[0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(0.1)^n}{n} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{(0.1)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta\cdot 0.1)^{n+1}}\right].$$

为使

$$\left|(-1)^n \frac{(0.1)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta\cdot 0.1)^{n+1}}\right| < \frac{(0.1)^{n+1}}{n+1} < 10^{-5},$$

当$n=4$时，就有

$$\frac{(0.1)^5}{5} 0.000002 < 10^{-5}.$$

故 $$\lg 11 \doteq 1 + \frac{1}{\ln 10}\left[0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4}\right]$$

$$\doteq 1 + 0.43429(0.1 - 0.005 + 0.00033 - 0.000025)$$

$$\doteq 1.04139.$$

例19 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

基本思路 利用已知函数的泰勒展开式，代入极限等式里，再求极限，

解 (1) 因为

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$

和 $$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5).$$

所以 $$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

（2）因为

$$x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - x^2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

例19表明，如果已知函数可表为泰勒展开式，则利用泰勒公式求某些函数的极限也很方便。

习　　题

§ 5.1

1．验证函数

$$y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

在区间$[-1, 2]$上使洛尔定理成立。

2．不用求出函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)x$$

的导数，说明方程 $f'(x) = 0$有几个实根？指出它们所在的区间。

3．证明下列不等式和等式

（1）$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$；

（2）$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$，　$x > 0$；

（3）$3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$，$|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$。

4．如果函数$f(x)$在邻域$U(a,\delta)$内连续，且在 $U^\circ(a,\delta)$内可导，当$x\to a$时，有 $f'(x)\to l$，则 $f'(a) = l$。

5．如果函数 $f(x)$在邻域$U(\xi,\delta)$内可微，且 $f'(\xi) = 0$，则存在一点列 $\{x_n\}$，当 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \xi$时有

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0.$$

6. 如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在常数 $L>0$，使之

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,\quad x_1,x_2\in[a,b].$$

7. 如果函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$。

8. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $0<a<b$，在 (a,b) 内可导，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\frac{b}{a}\right)f'(\xi).$$

§5.2

9. 利用洛比达法则求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\sin x-x}{5x^2+x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{e^x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\ln x)^x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{x}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$，　　其中 m 为常数；

(8) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$；　　(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\mathrm{arctg}\,x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}\,x}$；　　(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

10. 试说明下列极限不能用洛比达法则的理由。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$。

§5.3

11. 将多项式$P_4(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$表成形如$(x-4)$的正整数幂多项式。

12. 利用e^x的皮亚诺余项的泰勒展开式，写出函数$f_1(x)=e^{-x}$，$f_2(x)=e^{\sin x}$的泰勒展开式。

13. 求函数$f(x)=x(1+x)^a$的带有皮亚诺余项的马克劳林展开式。

14. 直接利用求导数的方法，求函数$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$在$x=2$的带有拉格朗日余项的三阶泰勒展开式。

15. 利用三阶泰勒公式求下列各数的近似值：

（1）$\sqrt[3]{30}$；　　　　（2）$\sin 18°$。

16. 利用泰勒公式求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$。

第六章　导数在研究函数上的应用

第五章的微分中值定理与泰勒公式为我们利用导数研究函数的性态提供了有力的工具．在这一章里，将在此基础上进一步地研究函数的单调性、极值，曲线的凸性、拐点及函数作图．

§6.1　函数单调性的判别法

在§1.5的第三段里我们已经定义了函数的单调性，及单调区间，现在给出判别可微函数单调性的方法．

定理6.1 如果函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则函数$f(x)$在区间(a,b)内递增（或递减）的充要条件是：$f'(x)\geqslant 0$（或$f'(x)\leqslant 0$），$x\in(a,b)$．

证明　必要性　由于可微函数$f(x)$在区间(a,b)内递增，因此对(a,b)内的任一点x，且$x+\Delta x\in(a,b)$，不论$\Delta x>0$或$\Delta x<0$，都有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

当$\Delta x\to 0$时，根据极限的不等式性质，可得

$$f'(x)\geqslant 0,\quad x\in(a,b).$$

充分性　已知$f'(x)\geqslant 0$，$x\in(a,b)$．在区间(a,b)内任取两点x_1与x_2，且$x_1<x_2$．在闭区间$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad \xi\in(x_1,x_2).$$

因为$x_2-x_1>0$，和$f'(x)\geqslant 0$，$x\in(a,b)$，所以有

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0\ \text{或}\ f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

即函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内递增。 □

同理可证递减的情形。

定理 6.2 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格递增（或严格递减）的充要条件是：$f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），$x\in(a,b)$，且在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x)\not\equiv 0$。

证明 **必要性** 已知函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增．根据定理6.1，对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\geqslant 0$ 只须证明在 (a,b) 内的任何子区间上，$f'(x)\not\equiv 0$．用反证法，假设存在一个区间 $[a_1, b_1]\subset(a,b)$，使之 $f'(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 上恒等于零，根据拉格朗日定理的推论1，函数 $f(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 上必是常数，这与函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增矛盾。

充分性 已知 $f'(x)\geqslant 0$，$x\in(a,b)$，且在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x)\not\equiv 0$。根据定理6.1知，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递增的，即对 (a,b) 内的任取两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2).$$

且有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2),\quad x\in[x_1,\ x_2] \tag{1}$$

只须证明，对于任意的 x_1，$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有不等式

$$f(x_1)<f(x_2).$$

用反证法，假设 $f(x_1)=f(x_2)$，那么对 $[x_1,\ x_2]$ 上的任一点 x，由（1）式，有

$$f(x_1)=f(x)=f(x_2),$$

即函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,\ x_2]$ 上是常数。于是，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[x_1,\ x_2]$ 上恒为零，与已知条件矛盾。

同理可证严格递减的情形。 □

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，当 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）时，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增（或严格递减）。

证明 已知函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 在 (a,b) 内任取两点 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日定理，得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,\ x_2).$$

因为 $f'(\xi)>0$, $x_2-x_1>0$, 所以有

$$f(x_2)>f(x_1),$$

故函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增.

同理可证严格递减的情形. □

例1 证明，函数 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 在区间（0，1）内是严格递增的，而在区间（1，2）内是严格递减的.

证明 函数 $f(x)$ 的导数是

$$f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$; 当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$. 根据推论，函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内是严格递增的，而在区间（1，2）内是严格递减的.

例2 求函数 $f(x)=1+3x-x^3$ 的单调区间.

解 函数 $f(x)$ 的导数是

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x).$$

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$; 当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$. 根据推论，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内是严格递减，在 $(-1,1)$ 内是严格递增，在 $(1,+\infty)$ 内是严格递减. 于是，区间 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 都是函数 $f(x)$ 的单调区间.

例3 证明，当 $x\neq0$ 时，有 $e^x>1+x$.

证明 设 $f(x)=e^x-(1+x)$. 由于有

$$f'(x)=e^x-1,$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$, 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$. 因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是严格递增的，在区间 $(-\infty,0)$ 内是严格递减的. 又因为当 $x=0$ 时，有 $f(0)=0$, 所以当 $x\neq0$ 时，

有 $f(x)>0$. 于是，当 $x\neq 0$时，有

$$e^x-(1+x)>0,$$

即 $$e^x>1+x \quad (x\neq 0).$$

例 4　证明，方程 $\sin x - x = 0$在 $(-\infty, +\infty)$ 内仅有一个实根.

证明　设函数 $f(x)=\sin x - x$. 有

$$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

且仅当 $x=2k\pi$时，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$f'(x)=0$,根据定理6.2，函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内是严格递减的. 又因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$

又根据函数的连续性，所以方程 $f(x)=\sin x - x=0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$内仅存在一个根.

§ 6.2　函数极值的判别法

在§5.1中我们已经给出了极值和极值点的概念，在此将对可微函数给出函数极值的判别法.

一　极值的判别法

在证完费尔马定理之后，曾指出：可微函数$f(x)$在点x_0取到极值的必要条件是：$f'(x_0)=0$. 这个事实表明，求可微函数的极值点应从满足方程 $f'(x)=0$ 的点中去找。另外，由于$f'(x_0)=0$表明函数 $f(x)$在点x_0 的变化率等于零，因此将满足方程 $f'(x)=0$的点称为 $f(x)$的**稳定点**. 从而求可微函数的极值点应从稳定点中去找.

定理6.3（极值的第一判别法）　已知函数 $f(x)$在点x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$ 内可导，且 $f'(x_0)=0$.

（1）如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$)；而 $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$，有 $f'(x)<0$（或 $f'(x)>0$)，则函数$f(x)$在点 x_0取极大值（或极小值）；

（2）如果当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 及 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)$符号相同，则函数 $f(x)$在点 x_0无极值。

证明 （1）设对任意的 $x\in U(x_0,\delta)$，但 $x\neq x_0$，在以 x_0，x为端点的闭区间上应用拉格朗日定理得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0), \tag{1}$$

其中的ξ 介于x_0与 x之间。

当 $x<x_0$ 时，且有 $f'(x)>0$，由（1）式可得 $f(x)<f(x_0)$；当$x>x_0$时，且有 $f'(x)<0$，由（1）式可得 $f(x)<f(x_0)$。故函数 $f(x)$在点 x_0取极大值。

同理可证极小值的情形。

（2）因为 $f'(x)$在点x_0的邻域$U(x_0,\delta)$内除在 x_0为零外符号相同。根据定理6.2知，函数 $f(x)$在邻域 $U(x_0,\delta)$内是严格单调的，所以函数 $f(x)$在点 x_0不取极值。 □

例1 求函数 $f(x)=1+3x-x^3$的极值。

解 $f'(x)=3-3x^2=3(1+x)(1-x)$。令

$$f'(x)=3(1+x)(1-x)=0,$$

解得稳定点 $x_1=1$，$x_2=-1$。

为了判别上述稳定点是否是极值点，须将区区$(-\infty,+\infty)$分成三个区间，在每一个区间上讨论 $f'(x)$ 的符号。现将结果列表如下：

x 的取值范围	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$ 的符号	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$的性态	↘	极小值点	↗	极大值点	↘

根据定理6.3 知，函数 $f(x)$在$x=-1$处取极小值而在 $x=1$处取极大值，且极小值为-1，极大值为 3 。

如果函数 $f(x)$在稳定点处存在二阶导数，那么用二阶导数的符号来判别稳定点是否是极值点也是很方便的。

定理6.4（极值的第二判别法） 已知函数 $f(x)$在点x_0 的

某个邻域 $U(x_0, \delta)$内可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$ 存在。如果 $f''(x_0)<0$（或 $f''(x_0)>0$），则函数 $f(x)$在点 x_0取极大值（或极小值）。

证明 由于函数 $f(x)$在点x_0存在二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，因此有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=f''(x_0).$$

因为 $f''(x_0)<0$，所以根据极限的保号性定理，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，由 $x-x_0<0$，推知 $f'(x)>0$；当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$时，由 $x-x_0>0$，推知 $f'(x)<0$。根据定理6.3 知，函数 $f(x)$在点 x_0取极大值。

同理可证极小值的情形。 □

例 2 求函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的极值($a\neq0$)。

解 $f'(x)=2ax+b$。 令

$$f'(x)=2ax+b=0.$$

解得稳定点 $x=-\frac{b}{2a}$。又有 $f''(x)=2a$，当 $a>0$ 时，有 $f''\left(-\frac{b}{2a}\right)>0$。根据定理6.4，函数 $f(x)$在点 $x=-\frac{b}{2a}$ 取极小值，且极小值为$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$；同理，当$a<0$时，极大值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$。这个结果与中学代数中采用配方法所得到的结果完全一致。

例 3 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3-1$的极值。

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$，令

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2=0.$$

解得稳定点：$x_1=-1$，　$x_2=0$，$x_3=1$。

又有

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1),$$

在 $x_2=0$处，有 $f''(0)=6>0$，根据定理 6.4，函数 $f(x)$ 在 $x=0$处取极小值，且极小值为 $f(0)=-2$；在 $x_1=-1$处，有 $f''(-1)=0$，定理6.4失效，用定理6.3来判别，当 $x\in(-1-\delta,-1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,-1+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，且 $f'(-1)=0$，根据定理6.2知，函数 $f(x)$在邻域 $U(x_1,\delta)$ 内严格递减，故函数 $f(x)$不取极值；同理，函数 $f(x)$ 在$x_3=1$ 处也不取极值。

二　最大值和最小值的求法

由于函数的极值概念是在邻域 $U(x_0,\delta)$ 内给出的，而函数的最大值和最小值的概念是在整个区间上给出的，因此两者是不同的。下面讨论求函数的最大值和最小值的方法。

对于在闭区间上的连续函数，§3.4的定理3.7 指出：函数在闭区间上存在最大值和最小值。

对可微函数而言，如果函数 $f(x)$ 的最大值（或最小值）在区间 $[a,b]$的内部某一点x_0取到，则点x_0不仅是稳定点（即 $f'(x_0)=0$），而且又是极值点；除此之外，最大值（或最小值）还有可能在区间$[a,b]$的端点上取到．因此，求可微函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值（或最小值）的方法可归纳如下：

第 一 步	求出$f(x)$的稳定点从中确定极值点；
第 二 步	计算各极值点的极值和端点的函数值；
第 三 步	比较极值和端点函数值的大小，确定最大（小）值．

例 4　求函数 $f(x)=1+3x-x^3$在区 $[-3,\ 2]$ 上的最大值和最小值。

解 本节的例1给出该函数在（－3，2）内的稳点$x_1=-1$，$x_2=1$ 都是极值点．而且又给出极小值为－1， 极大值为3；函数$f(x)$在区间〔－3，2〕端点的函数值为：

$$f(-3)=1+(-3\cdot3)-(-3)^3=19,$$

$$f(2)=1+3\cdot2-(2)^3=-1.$$

于是，

最大值 $M=\max\{-1, 3, 19, -1\}=19$,

最小值 $m=\min\{-1, 3, 19, -1\}=-1$.

在生产实践中， 常会遇到求函数的最大值和最小值的问题，如"用料最省"、"用时最少"和"效率最大"等问题。

例5 将边长为a的一块正方形的薄铁板，在其四角各剪去一个正方形，可折成一个无盖的方盒子，问剪去的正方形的边长多大，才能使折成的盒子容积最大？

解 如图6.1示．设剪去的正方形的边长为x，那么方盒底面正方形的边长为 $a-2x$，其高为 x，于是盒子的容积为

$$V(x)=x\cdot(a-2x)^2.$$

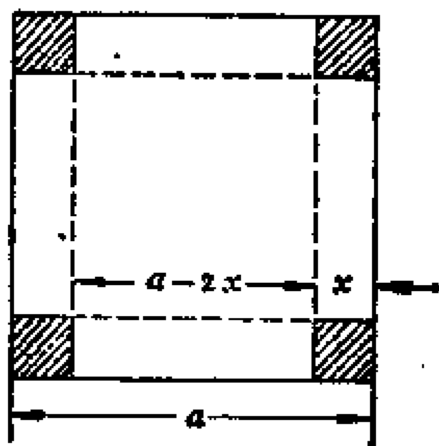


图6.1

由于x的变化范围是$\left[0,\frac{a}{2}\right]$，因此该问题就是求函数 $V(x)$ 在区间$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上的最大值问题。

因为

$$V'(x)=(a-2x)^2-4x(a-2x)$$
$$=(a-2x)(a-6x),$$

令 $$V'(x)=(a-2x)(a-6x)=0,$$

所以解得在区间$\left(0,\frac{a}{2}\right)$内的稳定点 $x=\frac{a}{6}$，且在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$端点的函数值都是0．另外，问题本身的实际意义表明，最大值一定存在，因此不必进一步判别稳定点是否是极值点，就可以断定

函数 $V(x)$ 在 $x=\frac{a}{6}$ 处取最大值，其最大值为 $\frac{2a^3}{27}$.

例 5 表明，在实际问题中，如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内只有一个稳定点，且实际问题本身又存在最大值（或最小值），就不需要进一步判别该稳定点是否是极值点，则可断言，函数 $f(x)$ 在其稳定点处取到最大（或最小）值。

例 6　如图 6.2示。已知某闭合电路中的电源电动势为 E，其内阻为 r，负载电阻为 R，在 E 和 r 不变的条件下，问负载电阻 R 多大时，使输出的功率为最大？

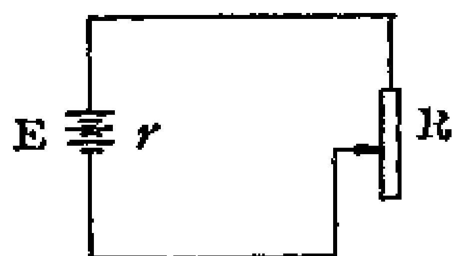


图6.2

解　由闭合电路的欧姆定律知，其闭合电路的电流为

$$I=\frac{E}{R+r}.$$

于是，通过电阻 R 的输出功率为

$$p=I^2R=\frac{E^2R}{(R+r)^2},$$

其中 E 和 r 为常数. 由问题的实际意义知 R 的变化范围为 $(0,+\infty)$.

因为

$$p'=\frac{-E^2(R-r)}{(R+r)^3},$$

令

$$p'=-\frac{E^2(R-r)}{(R+r)^3}=0,$$

所以解得在区间 $(0,+\infty)$ 内的稳定点为 $R=r$.

实际问题表明，最大值是存在的，则必在唯一的稳定点上取到，即当内阻与负载电阻相等时输出功率为最大，其最大功率为 $p=\frac{E^2}{4r}$.

例 7　证明不等式　$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$，其中 $m>0$，$n>0$，$x\in[0,a]$。

证明　令 $f(x)=x^m(a-x)^n$，当 $m>0$，$n>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，只须证函数 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$。

因为
$$\begin{aligned}f'(x)&=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}\\&=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x],\end{aligned}$$

所以从方程 $f'(x)=0$ 解得稳定点 $x=\frac{ma}{m+n}\in(0,a)$。当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$ 时，有 $f'(x)>0$。当 $\frac{ma}{m+n}<x<a$ 时，有 $f'(x)<0$，根据定理6.3知 $x=\frac{ma}{m+n}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点。

由于端点的函数值 $f(0)=0$，$f(a)=0$，$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 就是最大值，即

$$\begin{aligned}f\left(\frac{ma}{m+n}\right)&=\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\cdot\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n\\&=\frac{m^ma^m}{(m+n)^m}\cdot\frac{n^na^n}{(m+n)^n}\\&=\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}\cdot a^{m+n}.\end{aligned}$$

于是　$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$。

例 8　证明不等式

$$x^\alpha y^\beta\leqslant\alpha x+\beta y,$$

其中 $x,y>0$，$\alpha,\beta>0$，且 $\alpha+\beta=1$。

证明　用 y 除不等式的两边，并注意 $\alpha+\beta=1$，得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\leqslant\alpha\frac{x}{y}+\beta,$$

设 $t=\frac{x}{y}$，并令

$$f(t)=\alpha t+\beta-t^{\alpha}\quad t\in(0,+\infty).$$

$$f'(t)=\alpha(1-t^{\alpha-1}),$$

从方程 $f'(t)=0$解得稳定点 $t=1$。因为 $f''(t)=-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$，$f''(1)=-\alpha(\alpha-1)>0$ $(\alpha+\beta=1)$，所以 $f(1)=\alpha+\beta-1=0$是函数 $f(t)$的极小值。

另外对函数 $f(t)$ 又有

$$\lim_{t\to 0+0}f(t)=\beta>0,\quad \lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty,$$

于是 $f(1)=0$ 是函数 $f(t)$ 的最小值。这样，当 $t>0$ 时，有 $f(t)\geqslant 0$，即

$$\alpha t+\beta-t^{\alpha}\geqslant 0 \text{ 或 } \alpha t+\beta\geqslant t^{\alpha}.$$

于是 $$x^{\alpha}y^{\beta}\leqslant \alpha x+\beta y.$$

§ 6.3 函数作图

在§1.3的第三段里，我们给出了函数图象的定义，并指出了它在研究函数的各种性态的重要性。然而，迄今为止，我们只能用描点法描绘函数图象。一般来说，点取得越多，所描绘的函数图象就越准确。不过这样做工作量太大。为此，我们应用微分法掌握函数图象的性态以及一些关键性的点，从而能够比较准确地描绘出函数的图象。这就是本节所要讨论的函数作图。

一 曲线的凸性

定义 已知函数 $y=f(x)$在区间 (a,b)内可导。如果曲线 $y=f(x)$位于其每一点切线的上（或下）方，则称曲线$y=f(x)$在 (a,b)内向下凸（或向上凸）①。如图 6.3(a)或(b)示。

① 有的将向下凸叫做凹，向上凸叫做凸。

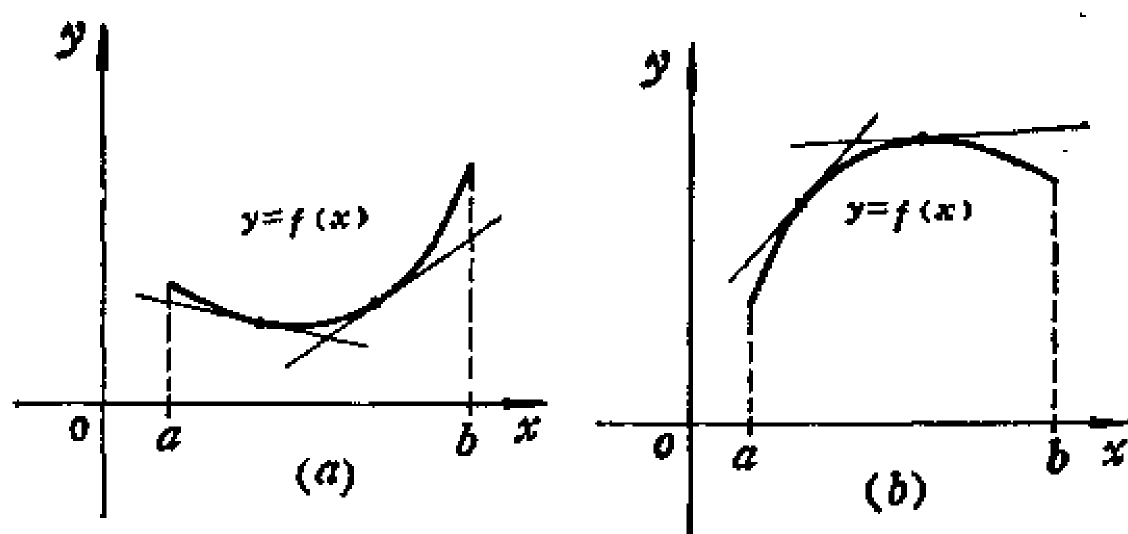


图6.3

定理 6.5 如果函数 $y=f(x)$在区间 (a,b)内可导，则曲线$y=f(x)$在 (a,b) 内向下凸（或向上凸）的充要条件是：导函数 $f'(x)$在区间 (a,b)内递增（或递减）.

证明 必要性 已知曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内向下凸，即对(a,b)内的任意一点x_0，曲线 $y=f(x)$位于切线 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$之上，故对任意的 $x\in(a,b)$

有 $$f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]\geqslant 0,$$

即 $$f(x)-f(x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0). \quad (1)$$

在区间 (a,b)内任取两点 x_1，x_2,且 $x_1<x_2$，对应不等式（1）有

$$f(x_1)-f(x_2)\geqslant f'(x_2)(x_1-x_2)$$

和 $$f(x_2)-f(x_1)\geqslant f'(x_1)(x_2-x_1),$$

将这两个不等式相加，得

$$f'(x_2)(x_1-x_2)+f'(x_1)(x_2-x_1)$$
$$=[f'(x_2)-f'(x_1)](x_1-x_2)\leqslant 0,$$

由于$x_1<x_2$，因此有

$$f'(x_1)\leqslant f'(x_2),$$

这就证明了导函数 $f'(x)$在(a,b)内是递增的.

充分性 已知导函数$f'(x)$在 (a,b) 内递增，往证对一切$x\in(a,b)$,不等式（1）成立.

在以x_0和 x为端点的闭区间上应用拉格朗日定理，得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0), \tag{2}$$

其中的 ξ是介于x与 x_0之间的。

欲证（1）式成立，只须证

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0.$$

为此将（2）式代入上式左端，得

$$\begin{aligned} &f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \\ &\quad=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

因为 ξ介于 x与 x_0之间，所以 $(x-x_0)$ 与 $(\xi-x_0)$ 同号，且导函数 $f'(x)$是递增的，故知 $[f'(\xi)-f'(x_0)]$与 $(x-x_0)$的符号不相反。于是，（3）式非负，即函数 $y=f(x)$在 (a,b) 内向下凸。

同理可证曲线向上凸的情形。 □

象定理6.4那样， 利用二阶导数判别曲线的凸性也是很方便的。

定理 6.6 如果函数 $f(x)$在 (a,b) 内存在二阶导数，则曲线 $y=f(x)$在 (a,b)内向下凸（或向上凸）的充要条件是，对一切 $x\in(a,b)$有 $f''(x)\geqslant 0$（或 $f''(x)\leqslant 0$）。

定理的证明将下列等价命题叙述一遍即可。

曲线 $y=f(x)$在 (a,b)内向下凸 $\overset{\text{定理6.5}}{\Longleftrightarrow}$ $f'(x)$在 (a,b)内递增 $\overset{\text{定理6.1}}{\Longleftrightarrow}$ 在(a,b)内 $f''(x)\geqslant 0$。 □

例 1 讨论曲线 $f(x)=1+3x-x^3$的凸性。

解 因为有

$$f'(x)=3-3x,\quad f''(x)=-6x,$$

所以，当 $x<0$ 时，$f''(x)=-6x>0$，曲线 $f(x)=1+3x-x^3$在区间 $(-\infty,0)$内向下凸；当 $x>0$时，$f''(x)=-6x<0$，曲线 $f(x)=1+3x-x^3$在区间 $(0,+\infty)$内向上凸。

二 曲线的拐点

定义 曲线 $y=f(x)$ 的向下凸与向上凸之间的分界点称为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

定理 6.7 如果函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 拐点的必要条件：$f''(x_0)=0$。

证明 由于点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，不妨认为曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内向下凸，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内向上凸；根据定理6.5知，$f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内递增；在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内递减。根据定理6.1知，在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内有 $f''(x)\geqslant 0$，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有 $f''(x)\leqslant 0$；根据定理6.3知，导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 取极大值；根据费尔马定理知，$f''(x_0)=0$。 □

定理6.7表明，在函数存在二阶导数的前提下，$f''(x_0)=0$ 仅仅是点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 拐点的必要条件。例如，$y=x^4$ 在 $x=0$ 处有 $f''(0)=0$，但是点 $(0,0)$ 并不是函数 $y=x^4$ 的拐点。

定理 6.8 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数，且 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有不同符号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点。

证明 不妨设在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内，$f''(x)>0$；在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内，$f''(x)<0$。根据定理 6.6，曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内向下凸，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内向上凸，由拐点的定义知，点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点。 □

利用定理6.7和定理6.8可知，求曲线 $y=f(x)$ 拐点的步骤如下：

第 一 步	求 $f''(x)$；
第 二 步	解方程 $f''(x)=0$，解得 $x=x_1$，$x=x_2$，…；
第 三 步	判别 $f''(x)$ 在点 $x=x_1$，$x=x_2$，…的左右是否变号。

例 2　求曲线 $f(x)=1+3x-x^3$ 的拐点。

解　第一步：求得

$$f'(x)=3-3x^2,\qquad f''(x)=-6x;$$

第二步：令 $f''(x)=-6x=0$，解得 $x=0$；

第三步：当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，故点 $(0,1)$ 是拐点。

例 3　求曲线 $f(x)=e^{-x^2}$ 的拐点。

解　第一步，求得

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2};$$

第二步：令 $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}=0$，解得 $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；

第三步：因为 e^{-x^2} 恒为正，所以判别 $f''(x)$ 的符号只须考虑 $(4x^2-2)$ 的符号就可以了。当 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，有

$$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}>0;$$

当 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，有

$$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}<0,$$

所以点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 都是拐点。

然而，定理6.8 的条件仅是充分的，即 $f''(x)$ 不存在的点，也有可能是拐点。

例 4　讨论曲线 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点。

解　因为

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}},$$

当 $x\neq 2$ 时，有

$$f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}.$$

所以当 $x=2$时，$f'(x)=0$，$f''(x)$ 不存在。但是，当 $x<2$ 时，有 $f''(x)<0$；当$x>2$时，有 $f''(x)>0$。根据定理 6.6 和拐点的定义知，点$(2,0)$是曲线$y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$的拐点。

三　曲线的渐近线

定义　设 p是曲线 $y=f(x)$上的动点，如果当点 p沿着曲线远离原点时，点 p与某一直线l 的距离无限地趋近于零，则称直线l为曲线 $f(x)$的渐近线（如图6.4）。

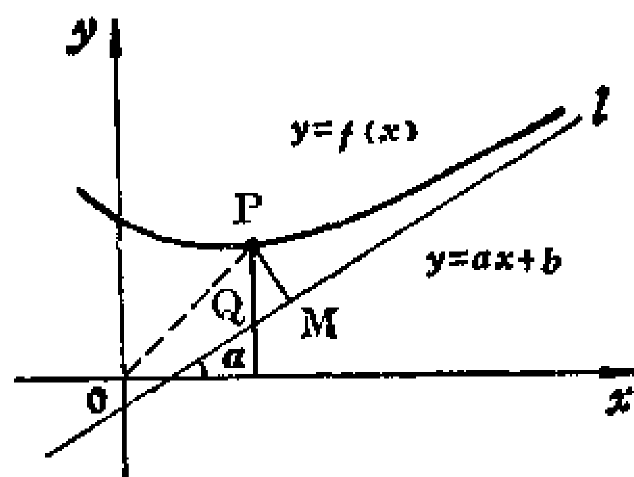


图6.4

例如，函数

$$y=\frac{1}{x}$$

当 $x\to\infty$时，以 $y=0$为水平渐近线；当 $x\to 0$时，以 $x=0$ 为垂直渐近线。

函数 $y=\operatorname{tg}x$，当 $x\to\frac{\pi}{2}-0$时，以$x=\frac{\pi}{2}$ 为垂直渐近线。

函数 $y=\operatorname{arctg}x$，当 $x\to-\infty$ 时，以$y=-\frac{\pi}{2}$ 为水平渐近线等等。

一般地对函数 $y=f(x)$来说，如果有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=c\text{（其中 }c\text{为常数）},$$

则直线 $y=c$就是函数的水平渐近线；如果有

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ 或\ \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty,$$

则直线 $x=a$就是函数 $f(x)$的垂直渐近线。

除此之外，如图6.4 示，还有斜渐近线．下面给出斜渐近线的求法。

已知函数 $y=f(x)$有斜渐近线 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$，如何利用已知函数 $f(x)$求其系数 a,b 呢？

如图6.4示。设 $p(x, f(x))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的动点；$|pM|$ 为点 p到直线 $y=ax+b$的距离；$|pQ|$ 为点 p 的纵坐标与直线 $y=ax+b$ 上的点Q（对应同一个 x）的纵坐标之差的绝对值，且 $|pQ|=|f(x)-ax-b|$；α为直线 $y=ax+b$与 x轴的夹角。于是有

$$|pM| = |pQ|\cdot\cos\alpha,$$

即
$$|pQ| = \frac{|pM|}{\cos\alpha}\ （\cos\alpha是一个非零常数）.$$

当 $x\to\infty$时（此图只能是 $x\to+\infty$），由定义 $|pM|\to 0$，由上式知：$|pQ| = |f(x)-ax-b|\to 0$，亦即

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0. \tag{4}$$

但是又有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]}{\frac{1}{x}}=0,$$

说明在 $x\to\infty$的过程中，$\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]$较$\frac{1}{x}$ 为高阶的无穷小。于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0,$$

但是由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$，有

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0,$$

即
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a. \qquad (5)$$

把求得的 a 代入（4）式，则有

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b. \qquad (6)$$

最后得到求函数 $y=f(x)$ 的渐近线 $y = ax + b$ 之系数的公式（5）和（6）.

例5　求曲线 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线.

解　由于 $f(x)$ 的分母 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$，因此有

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \infty \qquad \text{和} \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = \infty,$$

即 $x = -3$ 和 $x = 1$ 为曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线.

另外，由于有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x - 3x} = 1,$$

即 $a = 1$；以及

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 2x - 3} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} = -2,$$

即 $b = -2$，因此得 $y = x - 2$ 为函数 $f(x)$ 的斜渐近线.

四　函数作图

在§1.5中我们已讨论了函数的奇偶性和周期性；现在又研究了函数的单调性、极值、凸性、拐点和渐近线的求法. 在此基础上，利用描点法，就能比较准确地描绘出函数的图象. 现将作图步骤归纳如下：

第一步	确定函数的定义域；
第二步	讨论函数的奇偶性、周期性；
第三步	确定函数的某些特殊点，如间断点、一阶导数和二阶导数不存在的点、与坐标轴的交点等；
第四步	确定函数的单调区间、极值点、凸性区间和拐点，并列表；
第五步	求出渐近线；
第六步	描点作图．

例 6　描绘函数 $f(x)=1+3x-x^3$ 的图象。

解　第一步：$f(x)$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$；

第二步：$f(x)$ 是非奇、非偶、非周期函数；

第三步：$f(0)=1$；

第四步：在§6.1的例 2 、§6.2的例 1 、§6.3 的例 1 和例 2 的基础上，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↘下凸	极小值 $=1$	↗下凸	拐点的横坐标	↗上凸	极大值 $=3$	↘上凸

第五步：无渐近线；

第六步：描点作图，如图6.5示。

例 7　描绘函数 $f(x)=e^{-x^2}$的图象。

解　第一步：$f(x)$的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

第二步：因为有 $e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}$，所以 $f(x)$为偶函数。

第三步：$f(0)=1$；

第四步：因为 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$。令 $f'(x)=0$，解得$x=0$。且当 $x<0$时，$f'(x)>0$；当$x>0$时，$f'(x)<0$。所以根据定理6.3，$x=0$为极大值点，极大值$=1$。再根据定理6.2的推论，函数在区间$(-\infty,0)$内是严格递增的，而在区间$(0,+\infty)$

内是严格递减的。

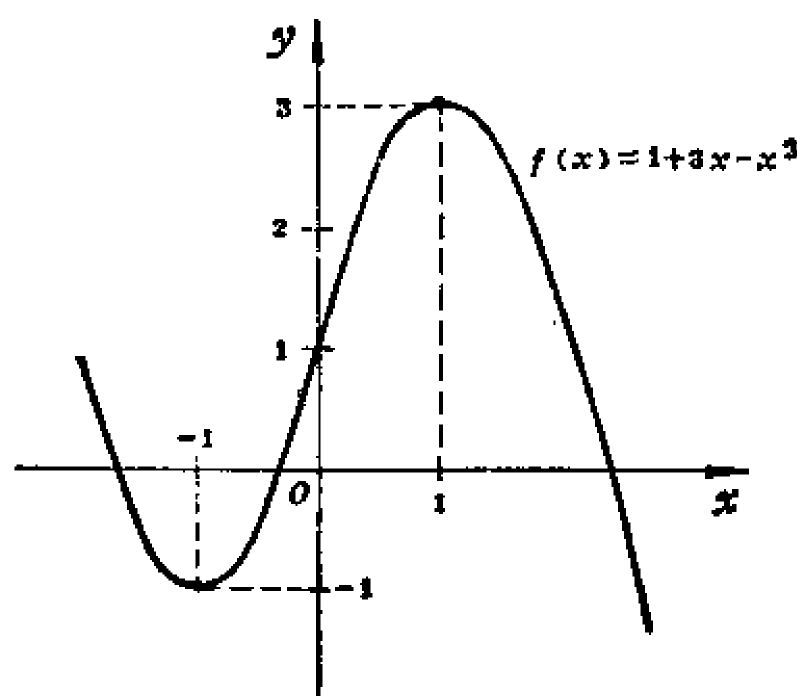


图6.5

另外，§6.3的例 3 给出，点$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$和$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$都是拐点。又指出，函数$f(x)$在$\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$是下凸的，在$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$是下凸的，在$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$是上凸的。

列表如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗下凸	拐点的横坐标	↗上凸	极大值 =1	↘上凸	拐点的横坐标	↘下凸

第五步：因为$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$，所以$y=0$是水平渐近线；

第六步：描点作图，如图6.6示。

例 8　描绘函数$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$的图象。

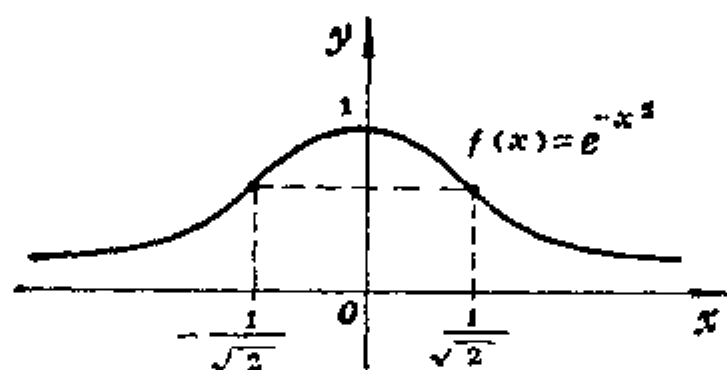


图6.6

解 第一步：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$；

第二步：函数 $f(x)$ 为非奇、非偶，非周期；

第三步：有 $f(0)=0$，$f(1)=0$；

第四步：由于

$$f'(x)=\frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}.$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$，$x_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

且有当 $x\in(-\infty,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 严格递增；当 $x\in(x_2,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 严格递减；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格递增；当 $x\in(0,x_3)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 严格递减；当 $x\in(x_3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格递增．从而得到 $f(x)$ 在点 x_2 取极大值，在 $x_1=0$ 取极大值，在 x_3 取极小值，且

$$f(x_2)=-\frac{71+17\sqrt{17}}{16},\quad f(x_1)=0,\quad f(x_3)=\frac{17\sqrt{17}-71}{16}.$$

又因为

$$f''(x)=\frac{2(5x-1)}{(x+1)^4}.$$

令 $f''(x)=0$，所以解得 $x=\frac{1}{5}$. 且有，当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$（但 $x\neq -1$）时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 为上凸，当 $x\in\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 为下凸，从而知点 $\left(\frac{1}{5},-\frac{1}{45}\right)$ 为拐点. 列表如下：

x	$(-\infty,x_2)$	x_2	$(x_2,-1)$	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5},x_3\right)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗上凸	极大	↘上凸	↗上凸	极大	↘上凸	拐点的横坐标	↘下凸	极小	↗下凸

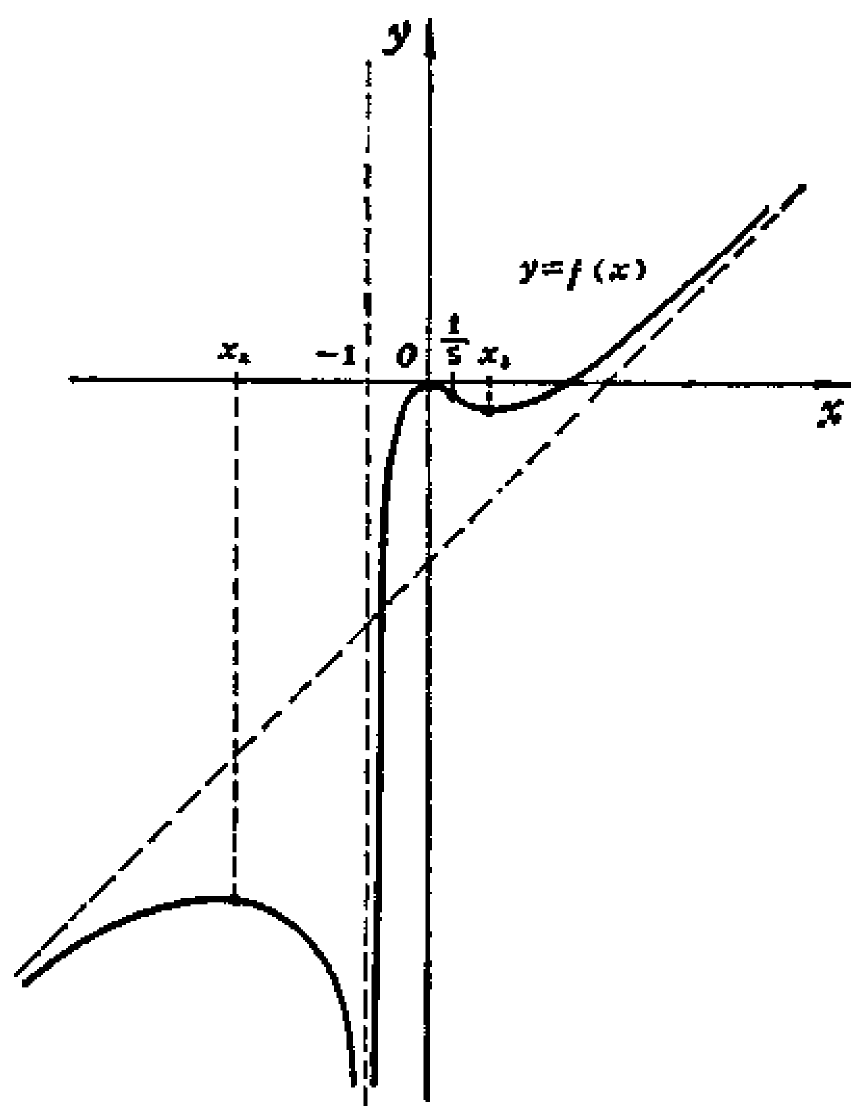


图6.7

第五步：因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$，所以 $x = -1$ 为垂直渐近线；又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = -3,$$

所以 $y = x - 3$ 为斜渐近线。

第六步：描点作图，如图6.7示。

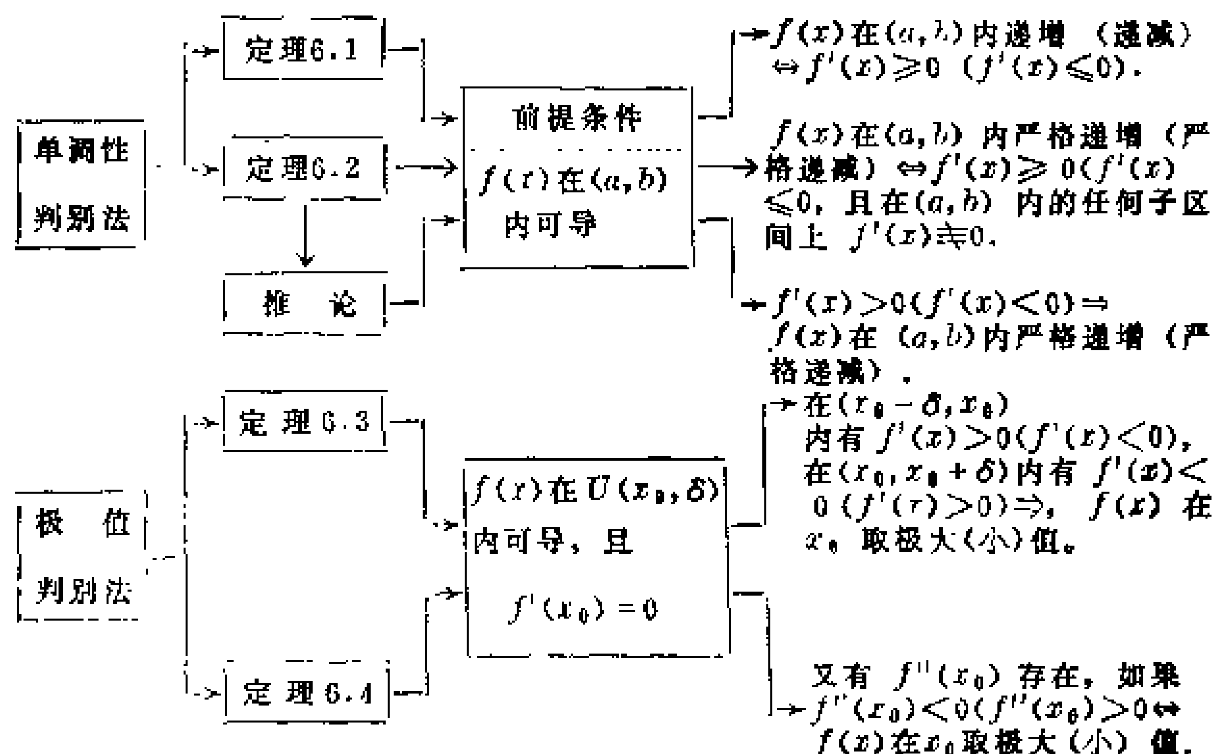
学习指导

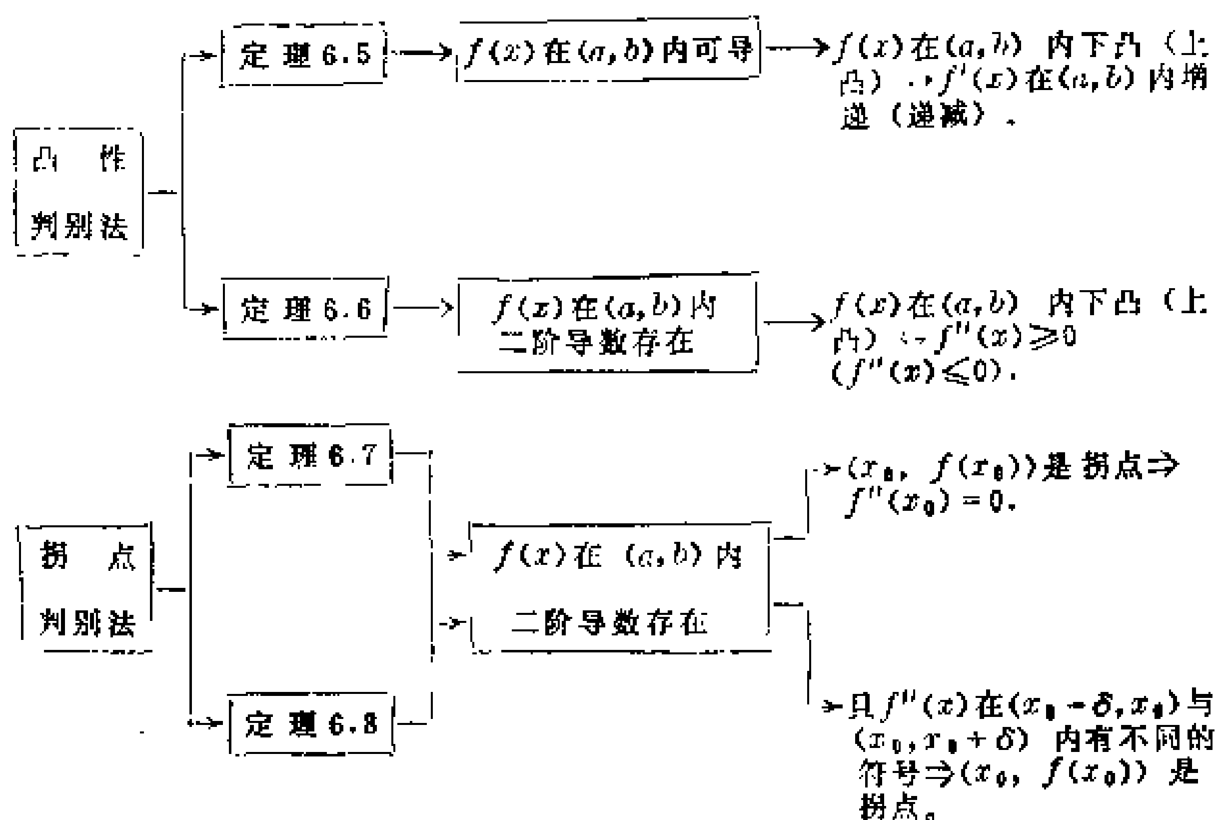
一　内容概要

1　重点及要求

应当明确本章所涉及的概念：函数的单调性、函数的极值、最大（小）值、曲线的凸性、曲线的拐点和曲线的渐近线。在此基础上，又给出了判别可微函数各种性态的判别法，对于这些判别方法不仅要掌握好它们的条件和结论，而且要了解它们建立的过程。由于本章的判别法较多，其条件有些类同，因此，在使用时一定要加以区分，防止混淆。因为函数作图是利用上述结果来研究函数各种性态的一种综合过程，所以要掌握好函数作图的步骤和方法，对一般的初等函数能较熟练地作出其图象。

2　对各种判别法的小结





3 渐近线的分类及其求法

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ （c 是常数）	$y=c$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线
如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$	$x=a$ 为$f(x)$的垂直渐近线
如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$	$y=ax+b$为 $f(x)$斜渐近线

二 几点说明

1 推论中的条件 $f'(x)>0$仅仅是充分的

即有这种可能，函数 $f(x)$在个别的孤立点虽然有$f'(x)=0$，但是函数 $f(x)$仍是严格单调的．这个事实已在定理 6.2中给出证明，这里只举例说明．

例如函数 $y=x^3$在§1.5的第三段已证明，在区间$(-\infty, +$

∞）内它是严格递增的，但是函数在$x=0$处有 $y'(0)=0$。

又如函数 $y=x-\sin x$，当$x=2k\pi$（$k=0$，±1，$\pm2,\cdots$）时有

$$y'=1-\cos x=0,$$

而且这些点是孤立的，但是根据定理6.2知，该函数在（$-\infty$，$+\infty$)内是严格递增的。

2　一个函数的极值点只能出现在稳定点和导数不存在的点中

对于可微函数而言，在§6.2的第一段里已经指出：求可微函数的极值点从稳定点里找。但是在极值的定义中并没有要求函数必须可微，这就是说对某些函数而言，极值点有可能在导数不存在的点中出现。例如，在§4.6 中曾指出函数 $y=|x|$，$x=0$处是角点；而函数$y=x^{\frac{2}{3}}$，$x=0$处是尖点；故在 $x=0$处两个函数的导数都不存在，但是它在$x=0$处都取到极小值。

然而，在导数不存在的点不一定都取到极值。例如，函数

$$y=x^{\frac{1}{3}}.$$

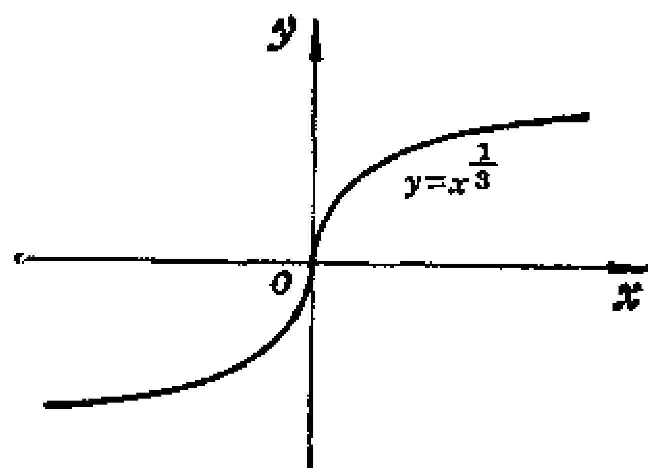


图6.8

因为有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=+\infty,$$

所以函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$在 $x=0$处不存在导数。如图6.8示。当$x>0$时，$f(x)>0$；当$x<0$时，$f(x)<0$。无论把 $\delta>0$取得多少小，在

邻域$U(0,\delta)$里总存在$f(x)>0$ 和$f(x)<0$的点，根据极值的定义，函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$在 $x=0$处取不到极值。

3　再说曲线的凸性

在§6.3的第一段里，我们给出了曲线 $y=f(x)$在 (a,b)内凸性的定义，在定义中不排除曲线在(a,b) 的某个小区间上为直线可能性。如果把这种情况排除在外，则定义应改成：已知函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，除切点外，曲线上纵坐标的值总大（小）于切线上相应纵坐标的值，则称曲线 $y=f(x)$ 在(a,b)内是**严格下凸（严格上凸）**的。

对此，定理6.5的充要条件应改为：导数 $f'(x)$在(a,b)内严格递增（严格递域）。而定理6.6 的充要条件也应改为：$f''(x)\geqslant 0$ （$f''(x)\leqslant 0$），$x\in(a,b)$，且在 (a,b) 的任何部分区间上 $f''(x)\neq 0$。

三　例题选讲

例1　证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,$$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时。

基本思路　作函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，证明在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递减。

证明　作函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$。因为有

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x),$$

且当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递减。

由于 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=1$，如果补定 $f(0)=1$，则得

$$f(0)>f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即
$$1>\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi},$$

因此当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，有

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x.$$

例 2 证明不等式

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

其中 n为自然数。

基本思路 将不等式（1）分成两个不等式来证；在每一个不等式中，分别作函 $f(x)$和 $g(x)$；利用$f(x)<0$（当 $x>0$ 时），推得 $f(n)<0$（当（$n=1,2,\cdots$）；$g(x)>0$（当 $x>0$ 时），推得$g(n)>0$（当$n=1,2,\cdots$）。

证明 首先证明

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

作函数

$$f(x)=\ln\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

又因为

$$f'(x)=\ln(1+x)-\ln x-\frac{2}{2x+1},$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，以及有，

$$f''(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)x}<0 \quad (x>0),$$

根据推论知，当 $x\to+\infty$时，导函数 $f'(x)$是严格递减地趋近于零．则有 $f'(x)>0$（当 $x>0$ 时），所以当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$严格递增地趋近于零．

于是我们证明了 $f(x)<0$ $(x>0)$．如将 x 取自然数 n，则对任意的n 有

$$f(n)<0, \quad n=1,2,\cdots,$$

即
$$\ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<0,$$

亦即
$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]<1,$$

故得
$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

其次证明

$$e<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这只须作函数

$$g(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1,$$

重复如上作法，即可得到 $g(x)>0$ $(x>0)$，则对任意的n 有

$$g(n)>0, \quad n=1,2,\cdots,$$

即
$$\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1>0,$$

亦即
$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]>1,$$

故得
$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>e.$$

总之，证得

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

例 2 表明：利用例 2 的结果，证明极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{e}{2}$$

是容易的。事实上，将不等式（1）变形如下

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+$$
$$+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

减去$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，得

$$\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

再乘上 n，得

$$\frac{n}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]<\frac{n}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

根据两边夹定理，故得。

$$\lim_{n\to\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{e}{2}.$$

例 3 如果 $f(x)$和 $\varphi(x)$都是可微分的函数，且

$$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)\quad(x\geqslant x_0),$$

则当 $x\geqslant x_0$时，有 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$。

基本思路 将不等式 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$ 变形如下

$$-[\varphi(x)-\varphi(x_0)]\leqslant f(x)-f(x_0)\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0),$$

以下证法与例 2 类似。

证明 令函数

$$F(x)=f(x)-f(x_0)-[\varphi(x)-\varphi(x_0)].$$

显然有$F(x_0)=0$。利用已知条件，且当 $x>x_0$时有

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)\leqslant|f'(x)|-\varphi'(x)\leqslant0,$$

说明函数 $F(x)$是递减的，再考虑到 $F(x_0)=0$，则有

$$F(x)\leqslant0\ （当\ x\geqslant x_0时），$$

即 $f(x)-f(x_0)\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)\quad(x\geqslant x_0)$.

再令函数

$$h(x)=-[f(x)-f(x_0)]-[\varphi(x)-\varphi(x_0)].$$

显然，有 $h(x_0)=0$. 利用已知条件，且当 $x>x_0$时有

$$h'(x)=-f'(x)-\varphi'(x)\leqslant|f'(x)|-\varphi'(x)\leqslant 0,$$

这说明函数 $h(x)$也是递减的，再考虑到 $h(x_0)=0$，则有

$$h(x)\leqslant 0(\text{当}x\geqslant x_0\text{ 时}).$$

即 $-[f(x)-f(x_0)]\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)\quad(x\geqslant x_0)$,

故得

$$-[\varphi(x)-\varphi(x_0)]\leqslant f(x)-f(x_0).$$

综合以上结果，于是有

$$-[\varphi(x)-\varphi(x_0)]\leqslant f(x)-f(x_0)\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$$

亦即 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$.

在几何上，例 3 表明：当 $x\geqslant x_0$ 时，如果函数 $f(x)$ 在每一点的增长速度 $|f'(x)|$ 不超过 $\varphi(x)$ 的增长速度 $\varphi'(x)$时，则 $f(x)$的改变量$|f(x)-f(x_0)|$不超过$\varphi(x)$ 的改变量 $\varphi(x)-\varphi(x_0)$。

例 4 方程 $\ln x=ax\ (a>0)$有几个实根？

基本思路 象 §6.1 例 4 那样，利用函数的单调性及连续性。

解 作函数 $f(x)=\ln x-ax$.定义域为 $(0,+\infty)$，因为

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}.$$

从 $f'(x)=0$解得$x=\dfrac{1}{a}$，所以将区间 $(0,+\infty)$ 分成两个部分区间$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

在区间$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上，由于 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$是严格递增的；在区间$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上，由于 $f'(x)<0$,因此函数 $f(x)$

是严格递减的。另外，又因为

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

和 $$f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1 = -\ln(a\cdot e)$$

$$= \begin{cases} -\ln(ae) > 0, \text{当} ae < 1 \text{时，即} a < \frac{1}{e}; \\ -\ln(ae) < 0, \text{当} ae > 1 \text{时，即} a > \frac{1}{e}. \end{cases}$$

于是，当$0 < a < \frac{1}{e}$时，在$\left(0, \frac{1}{a}\right)$和$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$中各有方程$f(x) = \ln x - ax = 0$的一个根；当 $a > \frac{1}{e}$时，方程$f(x) = \ln x - ax = 0$没有实根；当 $a = \frac{1}{e}$时，方程$f(x) = \ln x - ax = 0$只有一个根，即 $x = e$。如图6.9示。

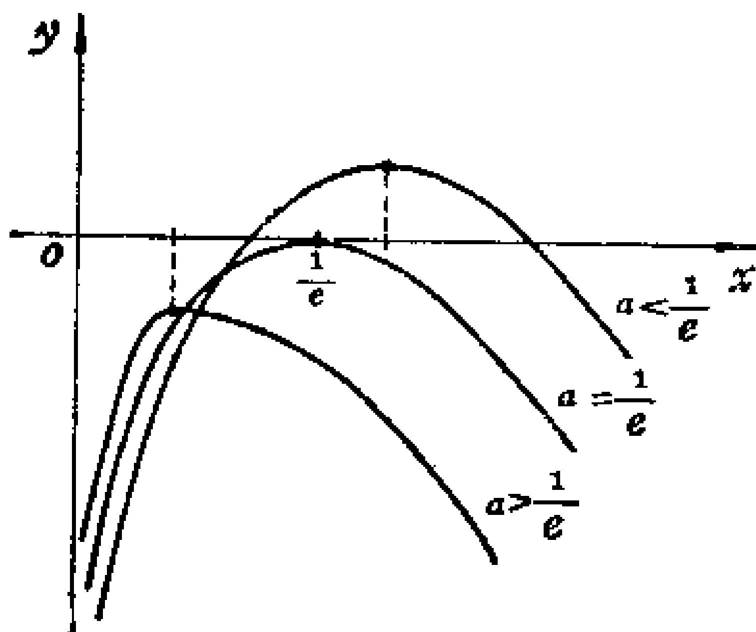


图6.9

例 5 方程 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
有几个实根？

基本思路 作法同例 4 .

解 设 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

$$f'(x)=3x^2-2x-1=3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

解方程 $f'(x)=0$，解得稳定点$x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{3}$.

在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$上，由于 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$上严格递增；又因为$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}>0$，且有

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,$$

所以方程 $f(x)=x^3-x^2-x+1=0$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$有一实根.

在区间$\left(-\frac{1}{3},1\right)$上，由于 $f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$上严格递减；又因为 $f(1)=0$，所以方程 $f(x)=x^3-x^2-x+1=0$ 在区间$\left(-\frac{1}{3},1\right)$内无实根.

在区间$(1,+\infty)$上，由于 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在$(1,+\infty)$上严格递增；又因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

所以方程 $f(x)=x^3-x^2-x+1=0$在区间 $(1,+\infty)$ 内没有实根.

然而，不难看到，$x=1$ 是 $f(x)=0$的根，于是在 $(-\infty,+\infty)$上方程 $x^3-x^2-x+1=0$有两个实根。如图 6.10示.

但是应指出，由于 $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$，因此知$x=1$是方程 $x^3-x^2-x+1=0$的二重根. 这个事实表明：利用函数的单调性，只能判别实根的个数不能确定根的重数.

例 6　如果 $a^2-3b<0$，则方程

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$$

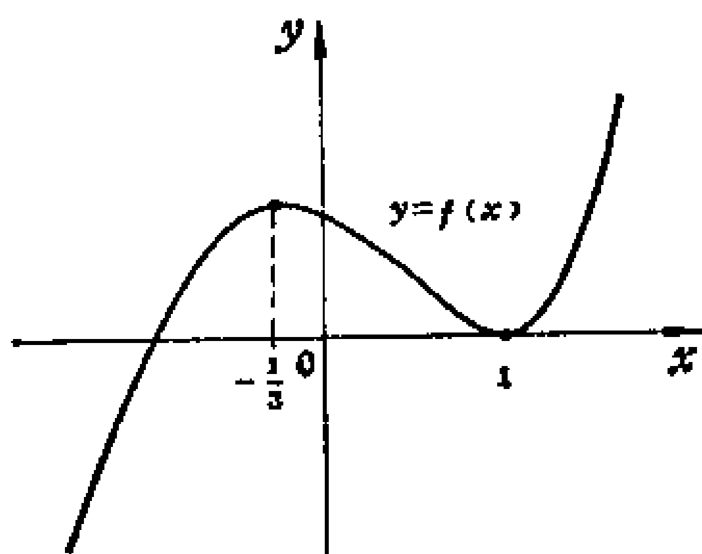


图6.10

只有唯一的实根。

基本思路 作法同例4。

证明 根的存在性。因为$f(x)$是三次多项式，所以方程至少有一个实根。

唯一性。因为

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,$$

该二次三项式的判别式为

$$\Delta=4a^2-12b=4(a^2-3b),$$

由已知条件知，$\Delta=4(a^2-3b)<0$，

所以$f'(x)=0$无实根，即$f'(x)$在整个实数轴上恒正或恒负，但是，由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，故知$f'(x)>0$（当$|x|<+\infty$时），于是证明了函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$中严格递增，从而$f(x)=0$只有唯一的实根。

例7 已知函数$f(x)$在区间$a\leqslant x<+\infty$内是连续的，且当$x>a$时，$f'(x)>k>0$，其中k为常数。证明：如果$f(a)<0$，则在区间$\left(a,\ a-\frac{f(a)}{k}\right)$内方程$f(x)=0$有一个且仅有一个根。

基本思路 唯一性的证明，利用函数的严格递增性；存在性的证明，利用连续函数的零点定理。

证明 已知 $f'(x)>k>0$，故 $f(x)$ 是严格递增的，如果 $f(x)=0$ 有根存在，则只能有一个根。

现在证明根的存在性。已知 $f(a)<0$，只须证明 $f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)>0$ 即可。为此过点 $A(a, f(a))$ 作以 k 为斜率的直线（如图6.11），其方程为

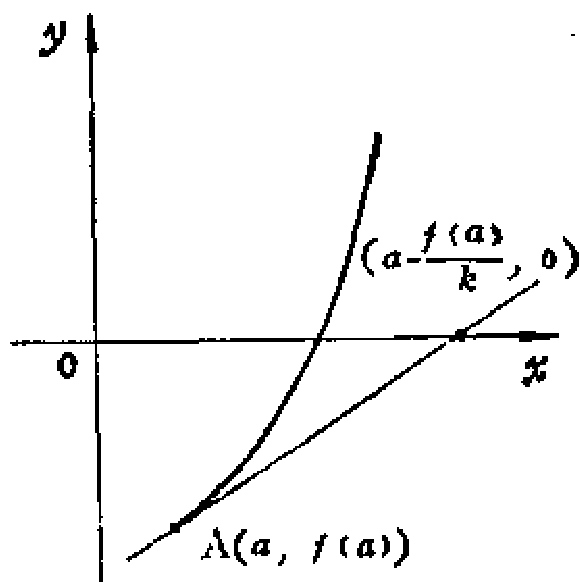


图6.11

$$y-f(a)=k(x-a).$$

且将函数 $k(x-a)+f(a)$ 用 $\varphi(x)$ 表示：

$$\varphi(x)=f(a)+k(x-a).$$

由于 $\varphi\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)=0$，$\varphi'\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)=k$，再利用例 3 的结果，因此得

$$\left|\varphi\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-\varphi(a)\right|<f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a),$$

即

$$|\varphi(a)|<f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a).$$

又因为 $\varphi(a)=f(a)$，且 $f(a)<0$，所以 $|\varphi(a)|=-f(a)$，从而得

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0.$$

根据零点定理知，在区间 $\left(a,\ a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内 $f(x)=0$ 有根。

对于根的存在性，我们还可以利用拉格朗日中值定理证明。在区间 $\left[a,\ a-\dfrac{f(a)}{k}\right]$ 上，对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值

定理，有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=f'(\xi)\left(-\frac{f(a)}{k}\right)>k\left(-\frac{f(a)}{k}\right)$$

$$=-f(a),$$

其中 $\xi\in\left(a,\ a-\frac{f(a)}{k}\right)$. 于是

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0,$$

根据零点定理知，在区间$\left(a,\ a-\frac{f(a)}{k}\right)$内 $f(x)=0$有根.

例 8 证明，当 $a+b+1>0$时，函数

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$$

取极值.

基本思路 利用二次三项式的判别式大于零，令$f'(x)=0$求稳定点；再利用二阶导数在稳定点的符号判别极大或极小.

证明 因为

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(a+b)}{(x-1)^2},$$

令 $f'(x)=0$,亦即，$x^2-2x-(a+b)=0$,当$a+b+1>0$时，所以方程存在两个不同的实根.

$$x_1=1+\sqrt{a+b+1},\qquad x_2=1-\sqrt{a+b+1},$$

就是所求的稳定点.

又因为

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)[x^2-2x-(a+b)]}{(x-1)^4}.$$

并注意 x_1和 x_2是方程 $x^2-2x-(a+b)=0$的根，所以有

$$f''(1\pm\sqrt{a+b+1})=\frac{2(1\pm\sqrt{a+b+1}-1)}{(1\pm\sqrt{a+b+1}-1)^2}$$

$$=\frac{2(\pm\sqrt{a+b+1})}{a+b+1}=\pm\frac{2}{\sqrt{a+b+1}},$$

也就是在点 $x_1=1+\sqrt{a+b+1}$ 处，$f''(x_1)>0$，故函数 $f(x)$ 取极小值；在点$x_2=1-\sqrt{a+b+1}$ 处，$f''(x_2)<0$，函数 $f(x)$ 取极大值。

例 9 求数列$\{a_n\}=\left\{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$的最大值。

基本思路 研究函数 $f(x)=x^2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$的性态。确定函数 $f(x)$严格递减范围，再进一步确定数列$\left\{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$的最大值。

解 令 $f(x)=x^2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$. 因为

$$f'(x)=x\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}(2-x\ln2),$$

在区间$[1,+\infty)$上，当$x>\frac{2}{\ln2}\doteq2.8$时，有$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 严格递减，所以数到$\left\{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$ 的最大值只能从前三项中去找。

由于

$$a_1=1^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$a_2=2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2},$$

$$a_3=3^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{9}{16},$$

因此，$a_3=\frac{9}{16}$是数列$\left\{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$的最大值。

例10 如图6.12示。在平面上有点 $A(0,a)$，$C(1,b)$，且 $b>a>0$。在区间$(0,1)$内取一点 $B(x,0)$ 使$\overline{AB}+\overline{BC}$的长为最小。

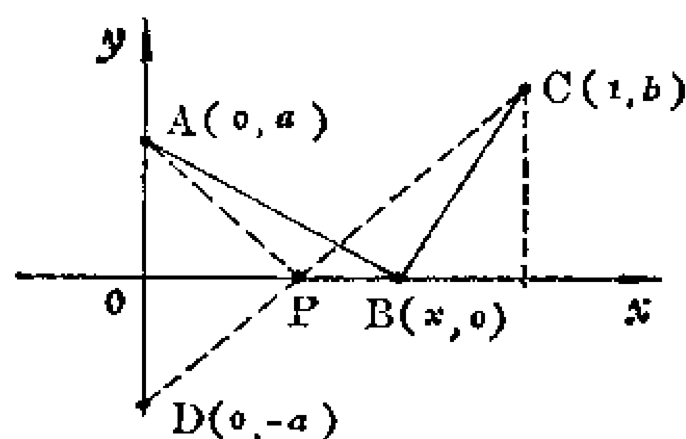


图6.12

基本思路 构造距离函数，求其最小值。

解 设点B的横坐标为 x，则 $AB+BC$ 的长是

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(1-x)^2},$$

因为 $$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1-x}{\sqrt{b^2+(1-x)^2}}$$

$$=\frac{x\sqrt{b^2+(1-x)^2}-(1-x)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+(1-x)^2}}.$$

令 $f'(x)=0$，即

$$x\sqrt{b^2+(1-x)^2}=(1-x)\sqrt{a^2+x^2}.$$

化简后得方程

$$(b^2-a^2)x^2+2a^2x-a^2=0,$$

解得

$$x_1=\frac{a}{b+a},\qquad x_2=\frac{-a}{b-a}.$$

由于$b>a>0$，因此 $x_2=\frac{-a}{b-a}$不属于（0，1）区间，故在（0，1）内只有唯一的稳定点 $x_1=\frac{a}{b+a}$.

从几何上可以证明最小值的存在，事实上，在 y 轴取点 $D(0,-a)$，过D，C引直线，与 x 轴相交于点 P。显然，

$\overline{AP}=\overline{DP}$，且$\overline{DC}$是直线，故$\overline{AP}+\overline{PC}$为最短.

于是在 x轴上，当 $x=\frac{a}{b+a}$时，$\overline{AB}+\overline{BC}$为最小（实际上当 $x=\frac{a}{b+a}$时，B与P重合）.

不难看到，下面的应用问题就是将例10赋予了实际意义.

如图6.13示．甲乙两地合用一台变压器，如果甲乙都用同一规格的输电线，问变压器设在何处，使所需电线最少？

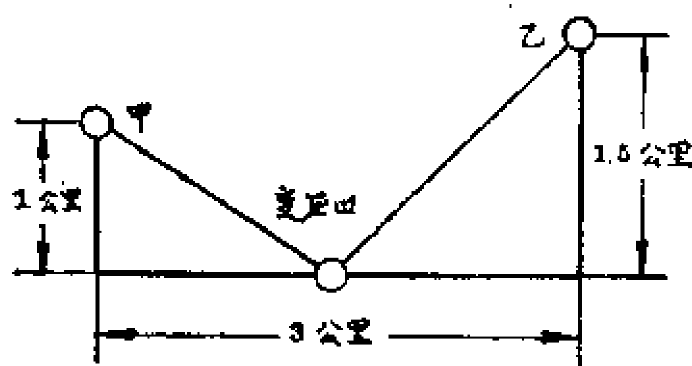


图6.13

事实上，在例10中将（0，1）区间改换（0，3）区间，这不难求得

$$x_1=\frac{3a}{b+a},\qquad x_2=\frac{-3a}{b-a}.$$

由于x_2不属于（0，3）区间．故 $x_1=\frac{3a}{b+a}$是稳定点，将$a=1$，$b=1.5$代入，有

$$x_1=\frac{3}{2.5}=\frac{6}{5}=1.2.$$

于是，变压器设在点O右方1.2公里处 需用电线为最少.

习　　题

§6.1

1. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=2+x-x^2$；　　（2）$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geqslant 0)$；

（3）$y=1+x+e^{-x}$ $(x>0)$；　　（4）$y=x-\sin x$。

2. 试确定下列方程实根的个数。

（1）$e^x+x=0$；　　（2）$6\ln x=x^2$ $(0<x<e)$。

3. 证明下列不等式：

（1）$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$；

（2）$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ $(x>0)$。

4. 设函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$在 $[a,b]$上可导，如果在 $(a,b]$上有$f'(x)>\varphi'(x)$，且$f(a)=\varphi(a)$，则在 $(a,b]$上有 $f(x)>\varphi(x)$。

§6.2

5. 研究下列函数的极值：

（1）$y=2+x-x^2$；　　（2）$y=(x-1)^3$；

（3）$y=(x-1)^4$；　　（4）$y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$。

6. 求下列函数的最大值和最小值。

（1）$y=x^2-4x+6$，$x\in[-3,10]$；

（2）$y=x+\dfrac{1}{x}$，　$x\in[0.01,\ 100]$；

（3）$y=\sqrt{5-4x}$，　$x\in[-1,1]$；

（4）$y=\sin x-\sin^2 x$，$x\in[-\pi,\pi]$。

7. 证明在周长一定的等腰三角形中，正三角形的面积为最大。

8. 在半径为 a的球的内接圆柱中，求体积为最大的圆柱。

§6.3

9. 讨论下列函数的凸性及拐点：

（1）$f(x)=x^3$；（2）$f(x)=x^4$；

（3）$f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$，$x\in[0,\pi]$。

10. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，证明不等式

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}>f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right).$$

11. 证明：如果函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内是下凸的，则 $f(x)+\varphi(x)$ 在 (a,b) 内也是下凸的。

12. 求下列函数的渐近线：

（1）$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$；（2）$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$。

13. 求下列曲线平行于 y 轴的渐近线：

（1）$xy^2-5y^2-x-2=0$；（2）$x^2y-4y-2x=0$。

14. 作出下列函数的图形：

（1）$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$；（2）$f(x)=3x^4-4x^3+1$；

（3）$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$。

第七章 实数的基本定理与连续函数的性质(续)

在第二章中我们给出了确界概念和确界公理。在此基础上证明了单调有界定理。它们都描述了实数的连续性。在本章中我们将继续讨论描述实数连续性的其它定理，即闭区间套定理、有限覆盖定理、柯西收敛准则，并应用这些定理证明在第三章已给出的在闭区间上连续函数的性质(包括一致连续性)。

§7.1 实数的基本定理

一 闭区间套定理

定理7.1(闭区间套定理) 如果有一闭区间列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots \qquad (7.1)$$

满足：

(1)对任意的自然数n,有 $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$;

(2)当 $n\to\infty$时， $b_n-a_n\to 0$,

则必存在唯一的实数ξ属于一切闭区间$[a_n, b_n]$。

把满足条件(1)和(2)的闭区间列(7.1)叫做**闭区间套**。

证明 因为$\{[a_n, b_n]\}$是闭区间套，由条件(1)知，$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$,所以有

$$a_n<b_1 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

这就是说，数列$\{a_n\}$是递增的，且有上界，根据单调有界定理，则数列$\{a_n\}$存在极限，如设

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，故有$a_n \leqslant \xi$，$n=1,2,\cdots$。

其次证明数ξ属于一切闭区间$[a_n, b_n]$.只须证明对任意的n有$\xi \leqslant b_n$即可。事实上，由于对任何的m，n皆有$a_m \leqslant b_n$。根据极限的不等式性质，有

$$\xi = \lim_{m\to\infty} a_m \leqslant b_n, \quad n=1,2,\cdots,$$

于是有$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$，$n=1,2,\cdots$，亦即$\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$。

最后证明数ξ是唯一的.用反证法，假设还有一个数$\eta \neq \xi$，且$\eta \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$，这表明闭区间套中每一区间的长度都不应小于$|\xi-\eta|$,这与条件(2)矛盾. □

注　在有理数集上闭区间套定理不一定成立。例如，以有理数为端点的闭区间列$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$，$n=1,2,\cdots$满足定理7.1的条件，已知存在数$e$属于一切闭区间$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\right.$ $\left.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$，但是"套"出来的数$e$并不是有理数。有理数集的这个性质，叫做有理数集的**不完备性**。如果在实数系里来讨论，则上述现象不会出现，实数集的这种性质通常称为**完备性**，亦称**连续性**。

例1　闭区间列

$$[-1,1], \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \cdots, \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \cdots,$$

由于有

$$\left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \quad n=1,2,\cdots$$

和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$。

因此它构成闭区间套。根据定理7.1知，存在唯一的实数0属于

一切闭区间$\left[-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right]$.

例 2　构造一个闭区间（依次取$\sqrt{2}$的不足近似值与过剩近似值做区间的端点）列

$$[1,2],[1.4,1.5],[1.41,1.42],\cdots,$$

显然该闭区间列也构成一个闭区间套，故存在唯一的实数$\sqrt{2}$属于一切闭区间.

值得注意的是：定理7.1 中强调区间套是闭的，对保证结论成立是不可缺少的。事实上，开区间列

$$(0,1),\left(0,\frac{1}{2}\right),\cdots,\left(0,\frac{1}{n}\right),\cdots,$$

虽然有

$$\left(0,\frac{1}{n+1}\right)\subset\left(0,\frac{1}{n}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

和
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

但是不存在一个公共点属于所有区间.

二　有限覆盖定理

定义　设有数集E与开区间集族Σ，如果对E中任意的数a，在开区间集族Σ中至少有一个开区间Δ含有a，即$a\in\Delta$，则称开区间集族Σ为数集E的一个**开覆盖**. 如果Σ中的开区间的个数是有限的，则称Σ为E的一个**有限覆盖**.

例 3　设Σ是如下的开区间集族

$$\Sigma=\left\{\left(\frac{1}{n},1\right)\middle|\,n=1,2,\cdots\right\},$$

而数集E是开区间$(0,1)$.很明显，Σ是开区间$(0,1)$ 的一个开覆盖. 事实上，对任意的$a\in(0,1)$，由于有$0<a<1$，只要取$n_0>\frac{1}{a}$，就有$\frac{1}{n_0}<a<1$，因此Σ中的开区间$\left(\frac{1}{n_0},1\right)$($n_0\in N$)含有$a$，

即$a\in\left(\frac{1}{n_0},1\right)$.

例 4 设Σ是如下的开区间集族：

$$\Sigma=\left\{\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right)\ \Big|\ n=1,2,\cdots,\right\}$$

而数集E是开区间$(0,1)$. 很明显，Σ不是开区间 $(0,1)$ 的覆盖. 事实上，对于开区间$(0,1)$内的点 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, 在Σ中任何一个开区间都不能含有它，因为点$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, 是开区间列

$$\left(\frac{1}{2},1\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\cdots,\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right),\ \cdots$$

的端点.

定理7.2（有限覆盖定理） 如果闭区间$[a,\ b]$ 被无限个开区间集族Σ覆盖，则在Σ中存在有限个开区间$\Delta_1,\Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_k$也覆盖了闭区间 $[a,\ b]$.

证明 实际上，定理的结论是有限个开区间集族$\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\ \Delta_k\}$为区间$[a,\ b]$的一个覆盖.

用反证法. 假设区间$[a,\ b]$没有有限覆盖，即在Σ中任意的有限个开区间都不能覆盖$[a,b]$,这时将区间$[a,b]$两等分,得两个闭区间，在这两个闭区间中至少有一个闭区间没有有限覆盖(否则,两个闭区间都有有限覆盖，合起来的整个区间$[a,b]$必有有限覆盖),并记作$[a_1,b_1]$(如果两个都没有有限覆盖,则可任取一个闭区间作为$[a_1,b_1]$).再将区间$[a_1,b_1]$两等分，又得两个闭区间，在这两个闭区间中也至少有一个闭区间没有有限覆盖. 并记作 $[a_2,\ b_2]$) 等等. 于是，得到每一个闭区间都没有有限覆盖的闭区间列：

$$[a,b],\ [a_1,\ b_1],\ \cdots,[a_n,b_n],\cdots \tag{7.2}$$

不难验证,闭区间列 (7.2) 满足闭区间套定理的两个条件. 事实上，由两等分法，有

$$[a_{n+1},\ b_{n+1}]\subset[a_n,\ b_n],\ n=0,1,2,\ \cdots,$$

其中 $a_0=a$，$b_0=b$，以及

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0.$$

故存在一个数 α 属于所有的闭区间$[a_n, b_n]$ $(n=0,1,2,\cdots)$，当然也有 $\alpha\in[a, b]$．另外，由于 $[a, b]$ 被Σ所覆盖，因此在Σ中至少存在一个开区间Δ包含α。可是，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$，所以对充分大的$n$，使$[a_n, b_n]$ 全部落在开区间Δ之内（图7.1）．此事表明，闭区间$[a_n, b_n]$既没有有限覆盖，又被Σ中的一个开区间Δ所覆盖，得到矛盾．故$[a, b]$必有有限覆盖． □

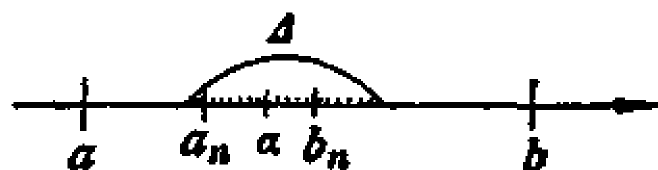


图7.1

在有限覆盖定理中，强调被覆盖的区间是闭的，这是重要的，否则定理未必成立。例如，由例 3 知，开区间$(0,1)$ 被开区间集族

$$\Sigma=\left\{\left(\frac{1}{n},1\right)\Big| n=1, 2, \cdots\right\}$$

覆盖，但是Σ中任意有限个开区间都不能将$(0,1)$ 覆盖。这是因为只要选取有限个开区间，就能从中选出最大的开区间$\left(\frac{1}{K},1\right)$，而其余的开区间都在$\left(\frac{1}{K},1\right)$之内．于是开区间$(0,1)$中总有一部分区间$\left(0, \frac{1}{K}\right)$不能被这有限个开区间覆盖。

三　柯西收敛准则

在§2.3和§2.6里我们分别介绍了数列和函数的柯西收敛准则，当时只证明了必要性，其充分性将在这里证明．

定理7.3（柯西收敛准则） 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n_1>n_0$，$n_2>n_0$时，有

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon.$$

证明 必要性的证明见§2.3的定理2.9.

充分性 假设条件成立，证明数列$\{a_n\}$收敛.

首先由已知条件可推得数列$\{a_n\}$是有界的. 事实上，对取定的$\varepsilon=1$，存在$n_0\in N$，当$n_1>n_0$，$n_2>n_0$时，有

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|<1.$$

将n_2固定，不妨取$n_2=n_0+1$，由n_1的任意性，因此对任意的自然数$n>n_0$，也有

$$|a_n-a_{n_0+1}|<1.$$

于是可得

$$|a_n|<|a_{n_0+1}|+1.$$

如设$M=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_{n_0}|,\ |a_{n_0+1}|+1\}$，则有

$$|a_n|\leqslant M,\ n=1,2,\ \cdots,$$

故数列$\{a_n\}$有界.

其次构造闭区间套，确定数ξ. 由不等式$|a_n|\leqslant M$，如令$[\alpha_1,\ \beta_1]=[-M,\ M]$则数列$\{a_n\}$的所有项属于闭区间$[\alpha_1,\ \beta_1]$. 现将闭区间$[\alpha_1,\ \beta_1]$两等分，得两个闭区间，在这两个闭区间中至少有一个含有$\{a_n\}$的无穷多个项，并记作$[\alpha_2,\ \beta_2]$（如果两个闭区间都含有$\{a_n\}$的无穷多个项，则可任选其一）；再将闭区间$[\alpha_2,\ \beta_2]$两等分，得两个闭区间，在这两个闭区间中至少有一个含有$\{a_n\}$的无穷多个项，并记作$[\alpha_3,\ \beta_3]$等等. 于是，得到一个闭区间列：

$$[\alpha_1,\ \beta_2],\ [\alpha_2,\beta_2],\ \cdots,[\alpha_n,\beta_n]\cdots.$$

其中每一个闭区间都含有$\{a_n\}$的无穷多个项. 不难验证这个闭区间列是满足如下条件的：

（1）$[\alpha_{n+1},\ \beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\ \beta_n]$，$n=1,\ 2,\cdots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n-\beta_n)=0$.

于是，根据闭区间套定理，存在唯一一个数ξ使

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=\xi.$$

最后来证明数ξ就是数列$\{a_n\}$的极限．一方面，由已知条件对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当 $n_1>n_0$，$n_2>n_0$ 时，有

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.3}$$

另一方面，由于$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$都以ξ为极限，因此对上面的$\varepsilon>0$，存在$n_0'\in N$，使得

$$|\alpha_{n_0'}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}\text{和}|\beta_{n_0'}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而有

$$\xi-\frac{\varepsilon}{2}<\alpha_{n0'}<\beta_{n0'}<\xi+\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为所有的闭区间$[\alpha_n,\ \beta_n]$都含有$\{a_n\}$的无穷多个项，所以存在$k\in N$，且$k>n_0$，使$\alpha_{n_0'}\leqslant a_k\leqslant\beta_{n_0'}$，

于是有

$$\xi-\frac{\varepsilon}{2}<a_k<\xi+\frac{\varepsilon}{2}.$$

即
$$|a_k-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.4}$$

当$n>k$时，并注意不等式(7.3)和(7.4)，得

$$|a_n-\xi|=|a_n-a_k+a_k-\xi|\leqslant|a_n-a_k|+|a_k-\xi|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故证明了数列$\{a_n\}$收敛于ξ． □

定理7.4（柯西收敛准则） 函数$f(x)$在点a存在极限的充要条件是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的x'与x''，当$0<|x'-a|<\delta$与$0<|x''-a|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

对于充分性的证明可完全类似于数列的情形来进行，但是更简便的方法是利用归结原则．

证明 必要性的证明见§2.6的定理2.18．

充分性 假设条件成立，证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

首先构造函数值数列$\{f(x_n)\}$，使之收敛。

如果$\{x_n\}$是收敛于a 的任意数列，且 $x_n \neq a$。则由已知条件中的$\delta>0$，存在$n_0\in N$当$n>n_0$时，有 $|x_n-a|<\delta$。与此同时，只要$m>n_0$，又有 $|x_m-a|<\delta$。于是对已知条件中的δ，当$n>n_0$，$m>n_0$ 时，就有

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

根据数列的柯西准则，对于任意收敛于a 的数列$\{x_n\}$，所对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$必收敛。由归结原则，极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。 □

§ 7.2 闭区间上连续函数性质的证明

在第三章的§3.3里，我们给出了闭区间上连续函数的三个基本性质：有界性，最值性和介值性。其中介值性定理利用零点定理已经证明，在这里将对有界性，最值性和零点定理予以证明。

定理7.5（有界性） 如果函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$在$[a, b]$ 上有界，即存在 $M>0$，对任意的$x\in[a, b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$。

证明 由于函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，因此对每一点 $\alpha\in[a,b]$，如取$\varepsilon=1$，存在某个邻域$U(\alpha,\delta)\subset[a,b]$，当$x\in U(\alpha,\delta)$时，有

$$|f(x)-f(\alpha)|<1,$$

即
$$|f(x)|<|f(\alpha)|+1.$$

于是，把闭区间$[a, b]$上每一点α 对应的邻域$U(\alpha, \delta)$所构成的集族记为

$$\Sigma=\{U(\alpha, \delta)\mid\alpha\in[a, b], \ |f(x)|<|f(\alpha)|+1, \ x\in U(\alpha, \delta)\}.$$

显然，Σ覆盖了$[a,b]$。根据有限覆盖定理，在集族Σ中存在有限个邻域

$$U(\alpha_1,\ \delta_1),\ U(\alpha_2,\ \delta_2),\ \cdots,\ U(\alpha_k,\ \delta_k)$$

将闭区间$[a,\ b]$覆盖，且有

$$|f(x)|<|f(\alpha_i)|+1, x\in U(\alpha_i,\ \delta_i),\ i=1,2,\cdots,k.$$

令 $M=\max\{|f(\alpha_1)|+1,\ |f(\alpha_2)|+1,\ \cdots,\ |f(\alpha_k)|+1\}$,
并注意到$[a,\ b]$上的任何一点x至少要属于$\{U(\alpha_k,\ \delta_k)\}$中的某一个，故对闭区间$[a,\ b]$上的任意点$x$，均有

$$|f(x)|<M. \qquad \square$$

定理7·5的证明过程表明，借助于有限覆盖定理，可把函数在闭区间上每一点的局部性质推广到整个闭区间上。

定理7.6（最值性） 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m，即在闭区间$[a,b]$上至少存在两点x_1与x_2，使

$$f(x_1)=m,\ f(x_2)=M,$$

对于任意的$x\in[a,b]$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$。

证明 因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，根据有界性定理，所以函数$f(x)$在$[a,b]$上有界。再根据确界公理知，$f(x)$在$[a,b]$上的函数值集合必存在上、下确界，分别记为M和m，于是，有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[a,b].$$

下面将证明，在$[a,b]$上至少存在两点x_1和x_2，使$f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，即上述的上、下确界就是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值。现仅就最大值的情形证明如下。

用反证法。假设$f(x)$在$[a,\ b]$上取不到它的上确界M，即对任意的$x\in[a,b]$，都有$M-f(x)>0$。这时设

$$F(x)=\frac{1}{M-f(x)}.$$

由于$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，且$M-f(x)>0$，因此$F(x)$在$[a,b]$上也连续，从而$F(x)$在$[a,b]$上有界，即存在一个正数K，使

$$0<\frac{1}{M-f(x)}<K.$$

解得 $f(x)<M-\frac{1}{K},\ x\in[a,\ b].$ （1）

另外，由于M是$f(x)$在$[a,\ b]$上的上确界，根据上确界的定义，因此对$\varepsilon=\frac{1}{K}>0$，至少存在一点$x_0\in[a,b]$，使

$$M-\frac{1}{K}<f(x_0)\leqslant M.$$

这与不等式（1）是矛盾的．于是在$[a,\ b]$上至少存在一点x_2，使$f(x_2)=M$.

对于最小值的情况，用同样方法可证明在$[a,b]$上至少存在一点x_1，使$f(x_1)=m$. □

定理7·7（零点定理） 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号（即$f(a)\cdot f(b)<0$），则在区间(a,b)内至少存在一点c，使得

$$f(c)=0.$$

证明 用反证法．假设在$[a,\ b]$上的所有点x都使$f(x)\neq0$．并令$[a,b]=[a_1,\ b_1]$，将闭区间$[a_1,\ b_1]$两等分，得两个闭区间．由假设知$f(x)$在闭区间$[a_1,\ b_1]$的中点$\frac{a_1+b_1}{2}$的函数值$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq0$，因此$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$不是大于零就是小于零．又因为$f(a)$与$f(b)$异号，所以在这两个闭区间上$f(x)$必在一个闭区间的端点值异号，将此闭区间记为$[a_2,\ b_2]$．再将$[a_2,\ b_2]$两等分，得两个闭区间，同理，在这两个闭区间中必有一个使$f(x)$在端点值异号，把它记为$[a_3,\ b_3]$等等．于是得到一个闭区间列

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \cdots,\ [a_n,\ b_n],\ \cdots,$$

使$f(x)$在每一个闭区间$[a_n,\ b_n]$ $(n=1,2,\ \cdots)$的端点值异

号. 显然，这个闭区间列满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

根据闭区间套定理知，必存在唯一一点 c，属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$. 且 $f(c)\neq0$. 此时不妨设 $f(c)>0$. 一方面，由于 $f(x)$ 在点 c 连续，根据连续函数的局部保号性定理，必存在邻域 $U(c, \delta)$，使

$$f(x)>0,\ x\in U(c, \delta).$$

另一方面，因为 $c\in[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=c,$$

所以当 n 充分大时，有

$$[a_n, b_n]\subset U(c, \delta);$$

这表明使函数 $f(x)$ 在其端点函数值的符号相反的闭区间却包含在使 $f(x)>0$ 的邻域里. 这是矛盾的，于是定理得证. □

§ 7.3 一致连续

在闭区间上的连续函数，除了在上节里证明的三个性质外，还有一个在数学分析理论上起着重要作用的一致连续性. 为了研究一致连续，我们从分析函数 $f(x)$ 在区间 I① 内连续入手.

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，即函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内任意点 x_0 都连续，用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述如下:

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

通常，由于 x_0 的任意性，因此所求得的 δ 不仅依赖于 ε，而且又依赖于 x_0，故 δ 可表为 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$. 即使对于同一个 ε,

---

① 区间 I 可以是开的、闭的、半开半闭的和无限区间.

函数 $f(x)$ 在变化较快的点所确定的δ 较函数 $f(x)$ 在变化较慢的点所确定的δ 要小些（如图7.2）。

对此我们自然要问，在区间(a, b)内，由于x_0的任意性，即使对于同一个ε，也有无穷多个 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 与之对应，在这无穷多个$\delta(\varepsilon, x_0)$中有没有最小的（即通用的）呢？这就是说，对给定的$\varepsilon>0$，当x_0在区间(a, b)内取不同值时，所对应的$\delta(\varepsilon, x_0)$是否有最小的呢？一般说来，不一定存在最小的 δ，即对某些区间上连续函数来说，这个 δ随着x_0的变化而趋近于零；而对某些区间上连续函数来说，存在这个最小的δ。

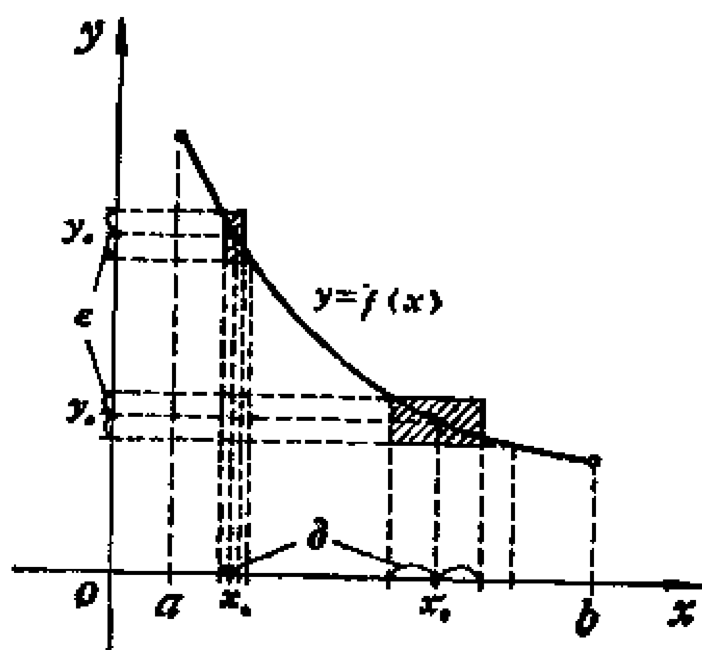


图7.2

例如，在区间$(0, 2]$上定义的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，对于同一个$\varepsilon>0$，这个最小的δ就不存在，且当$x_0\to 0+0$时，$\delta\to 0$，如图7.3示。

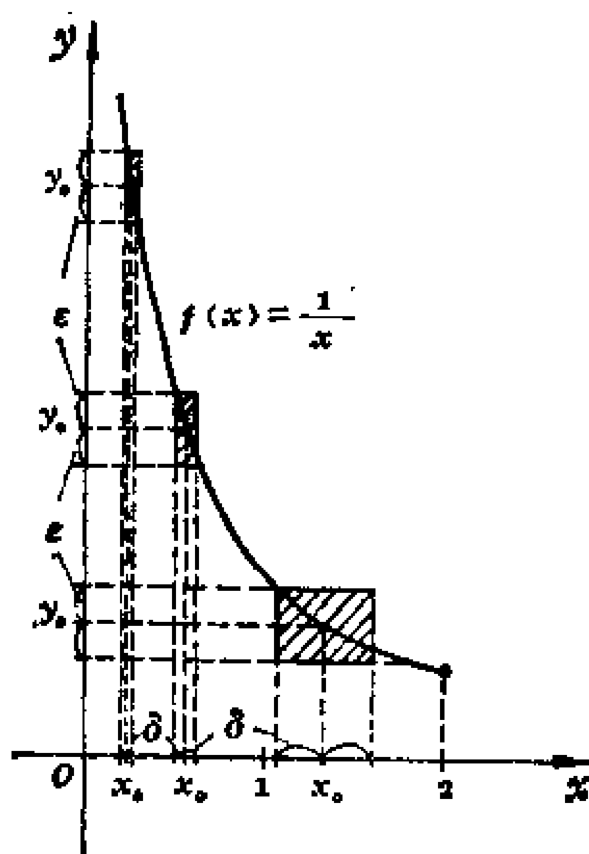


图7.3

又如，在区间$[0, 1]$上定义的函数 $f(x)=x^2$，对于同一个$\varepsilon>0$，这个

最小的δ 就存在。这只要在点 1 的左邻域取即可，因为函数 $f(x)=x^2$ 在这里变化较快。如图7.4示。

从图7.4中又不难发现，所谓的最小的δ 存在，实际上就是对同一个 ε 存在通用的 δ （即与点 x_0 的位置无关）。而且出现在函数 $f(x)$ 变化最快的点的附近。

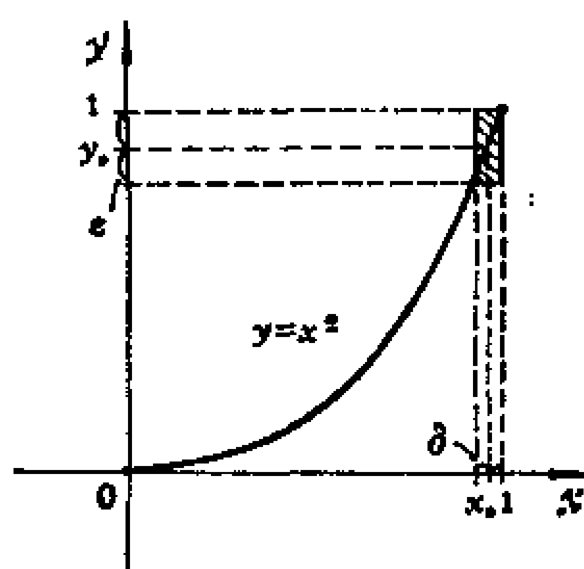


图7.4

显然，要求函数 $f(x)$ 在区间(a, b)上存在通用的δ比函数 $f(x)$在区间(a, b) 上连续更严格些，对此我们给出一致连续的概念。

定义 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义。如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的x_1, x_2属于I，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$在区间I 上**一致连续**。

定义表明：由于属于区间I 的x_1和x_2是任意的，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，因此，这里的 δ 就是通用的。此时，δ 仅仅依赖于 ε，而与 $x_0\in I$ 的位置无关。于是函数的一致连续性与函数的连续性不同， 它已不是局部性概念，而是和区间 I 联系在一起的整体性质。

现将一致连续与其否定叙述（即非一致连续）列表对比如下：

$f(x)$在区间 I 一致连续	$f(x)$在区间 I 非一致连续
对任意给定的$\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$ 任意的x_1，x_2属于 I 当 $\|x_1-x_2\|<\delta$时 有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|<\varepsilon$	存在某个 $\varepsilon_0>0$ 对任意$\delta>0$ 存在x_1，x_2属于 I 当满足$\|x_1-x_2\|<\delta$时 有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|\geqslant\varepsilon_0$.

例 1 证明函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是一致连续的。

证明 由于任取两点 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\left|2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right|\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\right|^{①}\leqslant 2\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{|x_1x_2|}\leqslant|x_1-x_2|,$$

其中用到 $x_1\geqslant1$，$x_2\geqslant1$。因此，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，对任意的两点 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon.$$

故函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。

例 2 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是非一致连续的。

证明 存在 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，对任意的 $\delta>0$，又存在某二点 $x_1=\frac{1}{2n}$，$x_2=\frac{1}{n}$ $(n\in N)$，当 n 充分大时，总可使 $|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{2n}<\delta$，但是

---

① 因为 $\left|\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right|\leqslant1$，$\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\right|$。

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{\frac{1}{n}}\right| = n > \frac{1}{2},$$

因此，根据一致连续的否定叙述知， 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上非一致连续。

例 3　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则函数 $f(x)$ 在 I 上连续。但逆命题不成立。

证明　在区间 I 内任取一点 x_0。根据函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，取 $x_1=x_0$，当任意的 $x_2\in I$ 满足 $|x_0-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_0)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。由点 x_0 的任意性，故知函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

逆命题不成立，在例 2 中， 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区 $(0,1)$ 间上是连续的，但它非一致连续。

例 3 表明，函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的必要条件是函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

然而，当限定区间 I 是闭的，则得如下的一致连续性定理。

定理7.8（一致连续性定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明　已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故对任意的一点 $\alpha\in[a,b]$ 有：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_\alpha>0$（表明 δ 与 α 有关），当 $|x-\alpha|<\delta_\alpha$ 时，有

$$|f(x)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而对区间 $(\alpha-\delta_\alpha,\ \alpha+\delta_\alpha)$ 内的任意两点 x_1 和 x_2 均有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(\alpha)+f(\alpha)-f(x_2)|$$

$$\leqslant |f(x_1)-f(\alpha)|+|f(\alpha)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{1}$$

为了证明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致连续的，现将具有不等式（1）的局部特性应用有限覆盖定理扩充到整个闭区间 $[a,b]$ 上去．由于点 α 的任意性，因此对区间 $[a,b]$ 上的每一点 α 均可按上述方法去做，故得到无穷多个区间 $(\alpha-\delta_\alpha,\ \alpha+\delta_\alpha)$，并将其缩小一半的区间 $\left(\alpha-\frac{\delta_\alpha}{2},\ \alpha+\frac{\delta_\alpha}{2}\right)$ 称之为点 $\alpha\in[a,b]$ 的"专有区间"．于是，这无穷多个专有区间的集族

$$\Sigma=\left\{\left(\alpha-\frac{\delta_\alpha}{2},\ \alpha+\frac{\delta_\alpha}{2}\right)\middle|\alpha\in[a,b]\right\}$$

将区间 $[a,b]$ 覆盖．根据有限覆盖定理知，在集族 Σ 中可选出有限个专有区间

$$\left(\alpha_1-\frac{\delta_1}{2},\ \alpha_1+\frac{\delta_1}{2}\right),\ \left(\alpha_2-\frac{\delta_2}{2},\ \alpha_2+\frac{\delta_2}{2}\right),\ \cdots,$$
$$\left(\alpha_n-\frac{\delta_n}{2},\ \alpha_n+\frac{\delta_n}{2}\right)$$

也覆盖了 $[a,b]$．

如果取 $\delta=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\ \frac{\delta_2}{2},\cdots,\frac{\delta_n}{2}\right\}$，则对任意的 $x_1',\ x_2'\in[a,b]$，当 $|x_1'-x_2'|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1')-f(x_2')|<\varepsilon.$$

事实上，对任意的 $x_1'\in[a,b]$，在有限个专有区间中必存在一个区间 $\left(\alpha_i-\frac{\delta_i}{2},\ \alpha_i+\frac{\delta_i}{2}\right)$ 将 x_1' 覆盖，又因为 $|x_1'-x_2'|<\delta\leqslant$

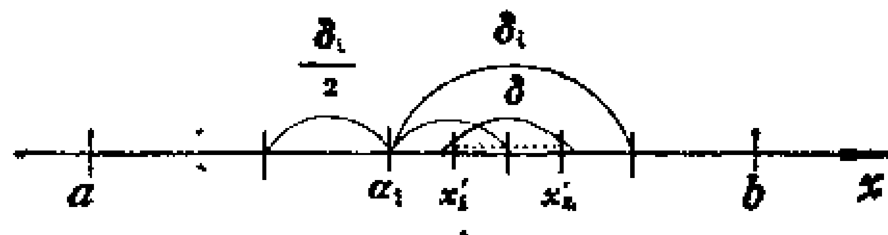


图7.5

$\frac{\delta_i}{2}(i=1,2,\cdots n)$，所以

$$|x_2'-a_i|=|x_2'-x_1'+x_1'-a_i|\leqslant|x_2'-x_1'|+|x_1'-a_i|$$
$$<\delta+\frac{\delta_i}{2}\leqslant\delta_i\left(\text{因为 }\delta\leqslant\frac{\delta_i}{2}\right).$$

这表明，当$|x_1'-x_2'|<\delta$时，x_1'与x_2'同属于区间$(a_i-\delta_i,\ a_i+\delta_i)$（如图7.5）。于是，由不等式（1）得

$$|f(x_1')-f(x_2')|<\varepsilon.$$

因此函数$f(x)$在$[a,\ b]$上一致连续。 □

定理7.8也叫**康托定理.**①

例 4 证明，函数$f(x)=x^2$在区间$[0,1]$上是一致连续的。

证明 用定义证，对任意给定的$\varepsilon>0$，及任意的$x_1,x_2\in[0,1]$，解不等式

$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2||x_1-x_2|<2|x_1-x_2|<\varepsilon.$$

其中用到$x_1\leqslant1$，$x_2\leqslant1$. 解得$|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$，故取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|x_1^2-x_2^2|<\varepsilon.$$

于是函数$f(x)=x^2$在$[0,1]$上一致连续.

用康托定理证：因为区间$[0,1]$是闭的，且函数$f(x)=x^2$在其上是连续的，根据康托定理知，函数$f(x)=x^2$在$[0,1]$上一致连续. 可见用康托定理证明是很简便的.

---

① 康托：Cantor，G.德国数学家，1845—1918年.

学 习 指 导

一 内容概要

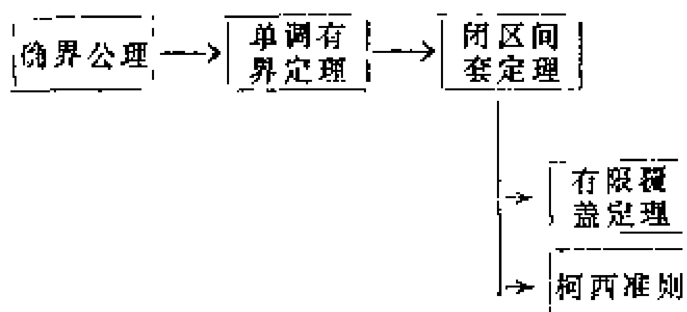
1 重点及要求

因为闭区间套定理是实数的基本定理之一，在数学分析的理论中占有重要地位，所以要求读者不但要了解定理的内容和条件，而且要掌握定理的证明方法及其应用。在给出闭区间套定理以后，我们给出了有限覆盖定理和柯西收敛准则充分性的证明。在它们的证明过程中，介绍了如何构造闭区间套的方法，应当很好地掌握它；有限覆盖定理可将无限覆盖化为有限覆盖。要真正理解有限覆盖定理在证明某些定理（如定理7.5与定理7.8）中的意义和作用。

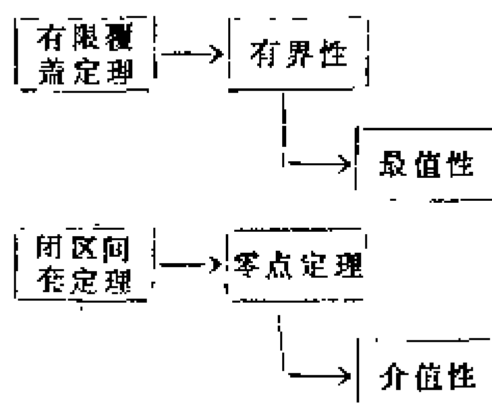
闭区间上连续函数的性质，在第三章里只给出结论。本章又在闭区间套定理和有限覆盖定理的基础上对这些性质予以证明。因此，要掌握这些性质的证明方法，并从中体会建立实数理论的重要性。

一致连续是在区间上给出的重要概念，要理解它的实质。要掌握一致连续的否定叙述（即非一致连续），因为证明某些问题时要用到它。康托定理是判别函数一致连续的充分性定理，要掌握它的证明方法。

2 本书的实数理论系统



3　闭区间上连续函数性质的证明过程



二　几点说明

1　建立实数集的必要性

数学分析是以极限为工具又以函数为研究对象的一门学科，而极限和函数的概念又都是建立在实数集基础之上的，因此实数集是数学分析的基础。

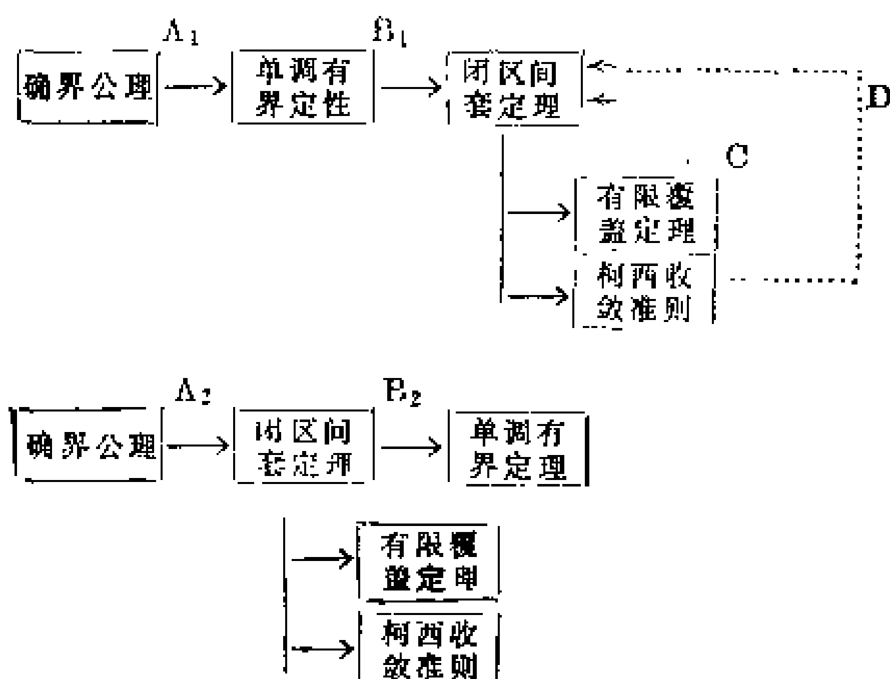
（1）若仅限于有理数集，那么有的量就无法度量。例如，圆的面积、边长为1正方形对角线的长度等都无法度量。

（2）若仅限于有理数集，那么许多本来有极限存在的有理数列就没有极限了。因此，极限这个重要工具就不能发挥它应有的作用。例如，单调有界有理数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$在有理数集里就不存在极限。因为它的极限是无理数 e。

（3）若仅限于有理数集，那么函数的连续性及其许多宝贵性质都失去了。例如，连续函数在闭区间上的有界性、最值性和介值性就不一定成立。

2　建立在确界公理基础上的不同体系

本书是在确界公理基础上首先给出单调有界定理，接着又给出闭区间套定理。但是也可以在确界公理基础上首先给出闭区间套定理，其次给出单调有界定理。这两种形式都可以实现实数的完备性。现将两种体系介绍如下：



由于A_1和B_1分别在第二章和本章的正文中已经证明，因此，本章的例题选讲只证A_2，B_2，C和D即可。

三 例题选讲

例1 用确界公理证明闭区间套定理。

基本思路 利用确界公理证明闭区间套$\{[a_n, b_n]\}$的左端点集合存在上确界，右端点集合存在下确界；且上、下确界相等；这个数就是我们要找的实数 ξ。

证明 闭区间套$\{[a_n, b_n]\}$的左端点数集为$\{a_n\}$，右端点数集为$\{b_n\}$。由条件（1）有

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1.$$

故知数集$\{a_n\}$有上界，数集$\{b_n\}$有下界。根据确界公理，必有

$$a=\sup\{a_n\}$$

和
$$b=\inf\{b_n\}.$$

其次证明$a=b$。用反证法，假设$a\neq b$，不妨设$b-a=l>0$，

这与定理的条件（2）相矛盾。

最后证明唯一确定的实数 ξ（记$a=b=\xi$）属于一切闭区间〔a_n，b_n〕。因为实数 ξ是数集$\{a_n\}$的上确界，又是数集$\{b_n\}$ 的下确界，所以对任意的n 有

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \qquad \square$$

亦即 $\xi \in$〔a_n，b_n〕，$n=1, 2, \cdots$。

例 2　利用闭区间套定理证明单调有界定理。

基本思路　就数列的递增情形构造闭区间列满足闭区间套定理的条件，进而确定实数ξ；再证明ξ就是该数列的极限。

证明　不妨设数列$\{x_n\}$是递增的，且有上界b_1。在数列$\{x_n\}$中任取一项，记作a_1，并设$a_1 < b_1$。于是，在以a_1和b_1 为端点的闭区间〔a_1, b_1〕内必含有数列$\{x_n\}$的无穷多项。将闭区间〔a_1, b_1〕二等分，得闭区间$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$。由于数列$\{x_n\}$是递增的，因此在闭区间$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$之中，只有一个包含数列$\{x_n\}$的无穷多项，并令该闭区间为〔$a_2$，$b_2$〕。再将闭区间〔$a_2, b_2$〕二等分，得闭区间$\left[a_2, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$。在这两个闭区间当中只有一个包含数列$\{x_n\}$的无穷多项。如此重复下去，得闭区间列：

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \cdots,\ [a_n, b_n],\ \cdots.$$

显然，该闭区间列满足：〔a_{n+1}，b_{n+1}〕$\subset$〔a_n, b_n〕（$n=1, 2, \cdots$）；$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0$。于是，根据闭区间套定理，必存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间〔a_n，b_n〕。

其次证明实数ξ就是数列$\{x_n\}$的极限。对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|x_n-\xi| < \varepsilon.$$

事实上，由于有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0,$$

因此，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_1\in N$，当$n>n_1$时，有

$$|b_n-a_n|<\varepsilon.$$

另外，由于$[a_n,\ b_n]$包含有递增数列$\{x_n\}$的无穷多项，于是必存在$n_2\in N$，当$n>n_2$时，有

$$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n.$$

取$n_0=\max\{n_1,\ n_2\}$，当$n>n_0$时，有

$$|x_n-\xi|<b_n-a_n<\varepsilon.$$

例 3 利用有限覆盖定理证明闭区间套定理。

基本思路 用反证法。造成闭区间$[a_1,\ b_1]$可被有限覆盖与这些有限覆盖区间和属于$[a_1,b_1]$的闭区间$\varDelta_n$没有公共点相矛盾。

证明 为了便于书写，将闭区间套$\{a_n,\ b_n\}$记作$\{\varDelta_n\}$。用反证法。假设在闭区间$[a_1,\ b_1]$上的每一点都不能同时属于所有的闭区间$\{\varDelta_n\}$，即任意一点$a\in[a_1,\ b_1]$一定不属于从第i $(i>1)$个开始的所有闭区间：$\{\varDelta a_i\}$。因为$\varDelta a_i$是一个闭区间，所以a与闭区间$\varDelta a_i$的距离δa大于零①。现以a为心，以$\frac{\delta_a}{2}$为半径作开区间$\varDelta_a^*$。显然，$\varDelta_a^*$与$\varDelta a_i$设有公共点。（如图7.6示）。

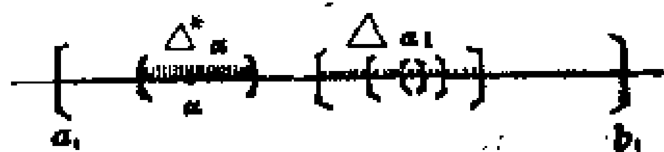


图7.6

对闭区间$[a_1,\ b_1]$内的每一点a都这样做，于是将得到一个开区间无限集族$S=\{\varDelta_a^*\ |a\in[a_1,\ b_1]\}$，且$S$把闭区间$[a_1,\ b_1]$盖住。根据有限覆盖定理，在$S$中必有有限个开区间：

$$\varDelta a_1^*,\ \varDelta a_2^*,\ \cdots,\ \varDelta a_K^*$$

① 点到闭区间的距离是指该点到闭区间中所有点距离的下确界。

将闭区间$[a_1, b_1]$盖住。而这些开区间分别与$\{\Delta_n\}$中的闭区间

$$\Delta_{\alpha_{1_i}}, \Delta_{\alpha_{2i}}, \cdots, \Delta_{\alpha_{K_i}}$$

没有公共点。如取$N=\max\{\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}, \cdots, \alpha_{K_i}\}$，则闭区间$\Delta_N$与$\Delta_{\alpha_1^*}, \Delta_{\alpha_2^*}, \cdots, \Delta_{\alpha_K^*}$设有公共点；另一方面，由闭区间套定理的条件（1）知

$$\Delta_N\subset\Delta_{\alpha_{1_i}}, \Delta_N\subset\Delta_{\alpha_{2_i}}, \cdots, \Delta_N\subset\Delta_{\alpha_{K_i}}.$$

当然$\Delta_N\subset[a_1, b_1]$。于是，出现$[a_1, b_1]$可被$\Delta_{\alpha_1^*}, \Delta_{\alpha_2^*}, \cdots, \Delta_{\alpha_K^*}$覆盖与它和$\Delta_n\subset[a_1, b_1]$没有公共点的矛盾。

例 4　利用柯西收敛准则证明闭区间套定理。

基本思路　利用闭区间套的端点构造数列

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots; \qquad (1)$$

用柯西收敛准则证明（1）存在极限；再证明这个极限属于所有闭区间。

证明　**存在性**　因为（1）有

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$$

和

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

所以对充分大的n，数列（1）的任意两项之差是任意小，根据柯西收敛准则，数列（1）存在极限，记为ξ。另外，数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别是（1）的奇偶子列，因此有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi, \quad \lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$$

又根据数列$\{a_n\}$是递增的，数列$\{b_n\}$是递减的，于是有$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，即属于所有的闭区间$[a_n, b_n]$。

唯一性　证法同定理7.1。

例 5　在指定的区间上研究下列函数的一致连续性：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$　$[-1, 1]$；

（2）$f(x)=\sqrt{x}$　$[1, +\infty)$；

(3) $f(x)=\ln x$ $(0,\ 1]$;

(4) $f(x)=x^2$ $[0,\ +\infty)$。

基本思路 利用一致连续的定义及否叙述和康托定理。

解 (1) 因为函数 $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$在闭区间$[-1,1]$上是连续的，根据康托定理，函数$f(x)$在其上是一致连续的。

(2) 对任意给定的$\varepsilon>0$，且对任意的x_1，$x_2\in[1,+\infty)$。解不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$$\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}<\varepsilon$$

(其中用到了$x_1\geqslant1$与$x_2\geqslant1$)，解得

$$|x_1-x_2|<2\varepsilon,$$

故取 $\delta=2\varepsilon>0$。于是，当$|x_1-x_2|<\delta=2\varepsilon$时，有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$在$[1,\ +\infty)$上一致连续。

(3) 对给定的 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任意的 $\delta>0$，取 $x_1=\dfrac{1}{n}$，$x_2=\dfrac{1}{3n}$，且有 $x_1-x_2=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3n}=\dfrac{2}{3n}$，对充分大的 n，可使

$$|x_1-x_2|=\frac{2}{3n}<\delta,$$

于是有

$$|\ln x_1-\ln x_2|=\left|\ln\frac{x_1}{x_2}\right|=\ln\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n}}=\ln3>\varepsilon_0=\frac{1}{2}$$

故知函数$f(x)=\ln x$在区间$(0,1]$上是非一致连续的。

(4) 对给定的$\varepsilon_0>0$，对任意的$\delta>0$，存在x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且取$x_1>\dfrac{\varepsilon_0}{\delta}$，$x_2=x_1+\dfrac{\delta}{2}$，从而知$x_2>x_1>0$。虽然有

$$|x_2-x_1|=\frac{\delta}{2}<\delta.$$

但是 $|x_2^2-x_1^2|=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>2x_1(x_2-x_1)$

$$>2\cdot\frac{\varepsilon_0}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=\varepsilon_0,$$

故知函数 $f(x)=x^2$在$[0, +\infty)$上是非一致连续的。

例6. 证明，函数

$$f(x)=\sin x^2$$

在$[0, +\infty)$上是非一致连续的。

基本思路 用一致连续的否定叙述。

证明 对给定的$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意的$\delta>0$，取$x_2=(2n\pi)^{\frac{1}{2}}$，

$$x_1=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=(2n\pi)^{\frac{1}{2}}+h①,\ h>0,\ n=1, 2, \cdots.$$

对于充分大的n，可使

$$|x_1-x_2|=h<\delta$$

于是对这样选取的x_1和x_2，有

$$|\sin x_1^2-\sin x_2^2|=\left|\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

故知函数$f(x)=\sin x^2$在$[0, +\infty)$上是非一致连续的。

例7 证明，函数$f(x)$在(a, b)上一致连续的充要条件是：函数$f(x)$在(a, b)上连续且$f(a+0)$和$f(b-0)$存在。

基本思路 证明必要性时要利用柯西收敛准则，证明充分性时要补充定义端点的函数值。

证明 **必要性** 已知$f(x)$在(a,b)上一致连续，根据§7·3的例3知，函数$f(x)$在(a, b)上必连续。现只须证$f(a+0)$和$f(b-0)$存在即可。由于$f(x)$在(a, b)上一致连续，亦即，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的x_1，$x_2\in(a, b)$，当$|x_1$

---

① 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2n\pi}\right)=0$，即$h\to0$.

$-x_2|<\delta$时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。对于端点 a，当x_1和x_2满足$0<x_1-a<\frac{\delta}{2}$，$0<x_2-a<\frac{\delta}{2}$时，必有 $|x_1-x_2|\leqslant|x_1-a|+|x_2-a|<\delta$，于是$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，根据柯西收敛准则知，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$存在。同理可证 $f(b-0)$存在。

充分性 已知 $f(x)$在(a, b)内连续，且有$f(a+0)$和$f(b-0)$存在。补充定义

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a)$$

和
$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b-0)=f(b),$$

于是函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，根据康托定理知，函数 $f(x)$在$[a, b]$上一致连续，当然在(a, b)上也是一致连续。

例 8 证明，如果函数 $f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，且极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在，则函数 $f(x)$在$[a, +\infty)$上是一致连续的。

基本思路 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在和康托定理，将$[a, +\infty)$分成$[a, X]$和$[X, +\infty)$进行证明。

证明 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，设

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

即，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$x\geqslant X$时，有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$。

于是将$[a, +\infty)$分成 $[a, X]$，$[X, +\infty)$。

根据康托定理知，函数 $f(x)$在$[a, X]$上一致连续，即对上面的ε，存在$\delta>0$，对任意x_1，$x_2\in[a, X]$，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

如果任意的 x_1，$x_2\in[X, +\infty)$，则有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

如果任意的$x_1\in[a, X]$，$x_2\in[X, +\infty)$，且当$|x_1-x_2|<\delta$时，必有$|x_1-X|<\delta$，$|x_2-X|<\delta$，则

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(X)|+|f(X)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

总之，不论是那种情况，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，且对任意的x_1，$x_2\in[a, +\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

故知函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续。

例 9 如果函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上可微，且$f'(x)$在$[0, +\infty)$上有界，则$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续。

基本思路 在任意的闭区间$[x_1, x_2]$上应用拉格朗日中值定理。

证明 已知$f'(x)$在$[a, +\infty)$上有界，令

$$|f'(x)|\leqslant M.$$

又因为函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上可微，所以对任意给$\varepsilon>0$，且对任意的x_1，$x_2\in[a, +\infty)$，不妨设$x_1<x_2$，解不等

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|\leqslant M|x_2-x_1|<\varepsilon,$$

解得$|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{M}$，故取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，当$|x_2-x_1|<\delta$时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon,$$

故知函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续。

例10 证明，在(a, b)上一致连续的函数$f(x)$必有界。

基本思路 利用例 7 把它变成在闭区间$[a, b]$上连续。

证明 已知$f(x)$在(a, b)上一致连续，根据例 7 知，$f(a+0)$和$f(b-0)$必存在，故可以补充定义

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a)$$

和
$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b-0)=f(b),$$

于是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。根据连续函数的有界性，知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，当然在 (a, b) 上也有界。

习　　题

§7·1

1．判断下列闭区间列是否构成闭区间套：

（1）$\left[\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}},\ \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}\right]$，$n=1, 2, \cdots$；

（2）$\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$，$n=1, 2, \cdots$；

（3）$\left[\dfrac{1}{3^n},\ \dfrac{2^n}{3^n}\right]$，$n=1, 2, \cdots$；

（4）$\left[\dfrac{1}{2n}, 1+\dfrac{3}{2n}\right]$，$n=1, 2, \cdots$。

2．如果开区间列

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \cdots,\ (a_n, b_n),\ \cdots$$

满足

（1）$(a_{n+1}, b_{n+1})\subset(a_n, b_n)$，$n=1,2, \cdots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

3．试用闭区间套定理证明：任意一个有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛的子列。

4．试判断下列区间 Δ 是否被区间集族 Σ 所复盖或有限复盖：

（1）$\Delta=(3,5)$，$\Sigma=\left\{\left(3+\dfrac{1}{n}, 5-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$，$n=1, 2, \cdots$；

（2）$\Delta=[1,2]$，$\Sigma=\left\{\left(1+\dfrac{1}{2^n}, 2+\dfrac{1}{3^n}\right)\right\}$，$n=1,2, \cdots$；

（3）$\Delta=[0,\ 1]$，$\Sigma=\left\{\left(-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}$，$n=1,2,\cdots$；

（4）$\Delta=[0,\ 1]$，$\Sigma=\left\{\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}$，$n=1,\ 2,\cdots$。

5．试用闭区间套定理证明：在闭区间上连续函数必在此区间上有界。

§7·3

6．研究下列函数在已知区域上的一致连续性：

（1）$f(x)=x\ (-\infty,+\infty)$；

（2）$f(x)=\sin x\ (-\infty,+\infty)$；

（3）$f(x)=x+\sin x\ (-\infty,\ +\infty)$；

（4）$f(x)=\cos\frac{1}{x}\ (0,\ 1]$；

（5）$f(x)=e^x\sin x\ [0,\ 1]$；

（6）$f(x)=x\sin x\ [0,+\infty)$。

7．证明：如果函数$f(x)$和$g(x)$在区间(a,b)内一致连续，则它们的和在$(a,\ b)$上也一致连续。

8．利用例题选讲的例7、例8、例9证明下列函数在指定的区间上是一致连续的。

（1）$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\ (0,\ 1]$；

（2）$f(x)=\frac{1}{x}\sin x\ [1,\ +\infty)$；

（3）$f(x)=x^a\ [1,\ +\infty)$，$0<a\leqslant1$。

第八章　不定积分

从这一章开始直到第十章为止，我们将讨论不定积分、定积分和定积分的应用，这些统称为一元函数的积分学。在微分运算中，是寻求已知函数的导数。然而，许多实际问题的解决，是寻求一个函数，使其导数为已知函数。这种运算恰是微分运算的逆运算，即所谓的积分运算。

本章在给出原函数与不定积分的概念之后，给出不定积分的运算法则，求不定积分的两个基本方法和讨论一些特殊类型函数的积分法。

§ 8.1　原函数与不定积分

在研究一个质点的运动时，它所经过的路程 S 是时间 t 的函数：

$$S=S(t).$$

如果已知这个函数，通过微分运算很容易求得在任意时刻 t 的速度和加速度，即

$$v(t)=\frac{dS}{dt} \text{和} a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}.$$

但是，实际问题常常不是这样的，而是已知质点的运动速度，让我们求路程，即已知 $v(t)$，求 $S(t)$。把上述问题抽象为数学形式，就是对已知函数 $f(x)$，求另一个函数 $F(x)$，使

$$F'(x)=f(x).$$

定义　已知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个函数 $F(x)$，对 I 上的任意点 x，有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为

$f(x)$在区间I上的一个原函数。

例如，因为自由落体的运动规律 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$，在时刻 t 的下落速度是

$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt,$$

所以运动规律 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$是速度 $v(t)=gt$的原函数。

又如，因为

$$(\sin x)'=\cos x,$$

所以$\sin x$ 是$\cos x$ 的原函数等等。

不仅如此，我们又看到

$$\left(\frac{1}{2}gt^2+5\right)'=gt,$$

$$\left(\frac{1}{2}gt^2-5\right)'=gt,$$

$$\left(\frac{1}{2}gt^2+C\right)'=gt \text{（其中}C\text{为任意常数），}$$

和 $$(\sin x+C)'=\cos x \text{（其中}C\text{为任意常数）.}$$

总之，如果$F(x)$为 $f(x)$的原函数，则形如$F(x)+C$（C 为任意常数）的函数，也是 $f(x)$ 的原函数。可见，如果一个函数 $f(x)$ 存在原函数（在第九章里将证明：连续函数一定存在原函数），则其原函数有无穷多个。可是，$f(x)$ 的原函数是否都可表示成$F(x)+C$的形式呢？对此给出如下定理：

定理8.1 如果$F'(x)=f(x)$，则 $f(x)$的所有原函数都可表示成形如

$$F(x)+C \text{（}C\text{为任意常数）}$$

的函数。

证明 设$\Phi(x)$为 $f(x)$的任意一个原函数，即 $\Phi'(x)=f(x)$。只须证明，$\Phi(x)=F(x)+C$即可。事实上，因为

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

根据§5·1的推论1知

$$\Phi(x)-F(x)=C \quad (C\text{为一常数}),$$

亦即 □

$$\Phi(x)=F(x)+C \quad (C\text{为任意常数})$$

定理8.1表明：如果一个函数存在原函数，则必有无穷多个，并且它们之间只相差一个常数。根据上述原函数的结构特点，欲求已知函数的所有原函数时，只须求出其中某一个原函数，再加上任意常数即可。

定义 把函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 I 上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx. \tag{8.1}$$

其中 $\int$ 称为**积分号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)dx$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**。

根据不定积分的定义，要求 $f(x)$ 的不定积分，就是求出 $f(x)$ 的所有原函数。设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则函数族 $F(x)+C$ 表示 $f(x)$ 的原函数的全体，于是不定积分又可表为

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{8·2}$$

其中 C 为任意常数，叫做**积分常数**。

例如，因为 $\frac{1}{2}gt^2$ 是 gt 的原函数，所以 gt 的不定积分是 $\frac{1}{2}gt^2+C$，即

$$\int gtdt=\frac{1}{2}gt^2+C.$$

又因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数，所以 $\cos x$ 的不定积分是 $\sin x+C$，即

$$\int\cos xdx=\sin x+C.$$

求已知函数的原函数的方法称为**不定积分法**或简称**积分**

法。如果把积分法看成一种运算，则可说积分法是微分法的逆运算。

从公式（8.1）和（8.2）可直接推得的结果：

（1） $d\int f(x)dx=f(x)dx$ 或 $(\int f(x)dx)'=f(x)$。 （8.3）

事实上，设$F'(x)=f(x)$。有

$$d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=dF(x)=F'(x)dx$$
$$=f(x)dx。$$

（2） $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$。 （8.4）

事实上，被积函数$F'(x)$就是$F(x)$的导数，故有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C。$$

公式(8.3)表明：微分号“d”出现在积分号“$\int$”的前面时，可以互相抵消。

公式（8.4）表明：积分号“$\int$”出现在微分号“d”的前面时，也可以互相抵消，不过在$F(x)$之后要加上任意常数C。

不定积分有明显的几何意义：如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则称$y=F(x)$的图象为$f(x)$的**积分曲线**。于是，函数$f(x)$的不定积分($\int f(x)dx=F(x)+C$)表示$f(x)$的某一条积分曲线$y=F(x)$沿着纵轴方向平行移动所得到的所有积分曲线$F(x)+C$组成的曲线族。而 $(F(x)+C)'=f(x)$ 表明，曲线族$F(x)+C$的任意一条曲线对应的切线斜率都等于$f(x)$（如图8.1）。

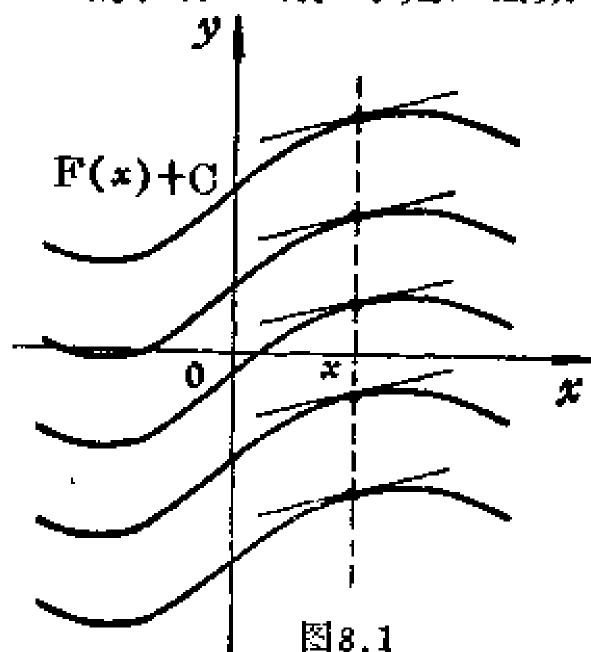


图8.1

§ 8.2 基本积分表与不定积分的运算法则

我们知道，导数的定义是构造性的，即从定义本身就可以求出导数．而不定积分的定义与导数的定义不同，它是非构造性的，即不能从定义本身给出求不定积分的方法，因此，求不定积分较求导数要困难得多．然而，根据积分法是微分法的逆运算，再利用基本初等函数的导数公式，很容易建立如下的基本积分表：

1 $\int 0dx = C$；

2 $\int adx = ax + C$（a为任意常数），

及$\int 1dx = \int dx = x + C$；

3 $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$（$a \neq -1$，$x > 0$）；

4 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$①（$x \neq 0$）；

5 $\int e^x dx = e^x + C$；

6 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$（$a > 0$，$a \neq 1$）；

7 $\int \sin x dx = -\cos x + C$；

8 $\int \cos x dx = \sin x + C$；

---

① 根据

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0. \end{cases}$$

容易验证，$(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$（$x \neq 0$）的正确性．

9 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$;

10 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

11 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

12 $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$;

13 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$;

14 $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arcctg} x + C$;

15 $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

16 $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

因为许多函数的不定积分最后都要化成这些基本积分表，所以对上述积分表要求读者必须熟记。

下面给出不定积分的运算法则：

定理8.2 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，k 为实数（$k \neq 0$），则函数 $kf(x)$ 在区间 I 上也存在原函数，且有

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \tag{8.4}$$

证明 根据导数运算法则有

$$\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left[\int f(x)dx\right]' = kf(x),$$

即 $k\int f(x)dx$ 为函数 $kf(x)$ 的原函数，且有

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad \square$$

公式（8.4）表明：**常数因子可以移到积分号外。**

定理8·3 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上存在原函

数，则函数 $f(x)\pm g(x)$ 在区间 I 上也存在原函数，且有

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx. \tag{8.5}$$

证明 根据导数运算法则有

$$\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]'$$
$$=\left[\int f(x)dx\right]'\pm\left[\int g(x)dx\right]'=f(x)\pm g(x),$$

即 $\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ 为函数 $f(x)\pm g(x)$ 的原函数，且有

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx. \qquad \square$$

公式（8.5）表明：**两个函数代数和的不定积分等于每个函数的不定积分的代数和。**

综合上述结果，易得如下的推论。

推论 如果函数 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在其公共的区间 I 上存在原函数，则它们的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}k_i f_i(x),①$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，在 I 上也存在原函数，且

$$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}k_i\int f_i(x)dx.$$

利用上述法则和基本积分表，可求得一些较简单函数的不定积分。

例1 求 $\int(10^x+3\sin x+\sqrt{x})dx$.

---

① “$\sum$”是取和符号，$\sum_{i=1}^{n}k_i f_i(x)=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)$.

解 $\int(10^x+3\sin x+\sqrt{x})dx$

$$=\int 10^x dx+3\int\sin x dx+\int\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-3\cos x+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-3\cos x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 2 求$\int p_n(x)dx$.其中$p_n(x)$是n次多项式函数,$p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

解 $\int p_n(x)dx$

$$=\int(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)dx$$

$$=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C.$$

例 3 求$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int 1dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

例 4 求$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$.

解 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$

$$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C.$$

例 5 求$\int(\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x+\mathrm{ctg}^2 x)dx$。

解 $\int(\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x+\mathrm{ctg}^2 x)dx$

$$=\int\mathrm{sh}x dx+\int\mathrm{ch}x dx+\int\mathrm{ctg}^2 x dx$$

$$=\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$$

$$=e^x+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$$

$$=e^x+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int 1dx$$

$$=e^x-\mathrm{ctg}x-x+C.$$

例 6 证明，如果$\int f(x)dx=F(x)+C$，则

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\ (a\neq0).\qquad(8,6).$$

证明 令$u=ax+b$，因为有

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right]'=\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]'$$

$$=\frac{1}{a}F'(u)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{a}F'(u)\cdot a=F'(u)=f(u)$$

$$=f(ax+b),$$

所以公式（8.6）成立。

例 7 求$\int\sin ax dx\ (a\neq0)$。

解 已知

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

如令$u = ax$，根据公式（8.6），则有

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \operatorname{coc} ax + C.$$

例 8 求$\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} dx$.

解 已知

$$\int x^{-\frac{5}{2}} dx = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + C,$$

如令$u = 5x - 2$，根据公式（8.6），则有

$$\int (5x-2)^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{5}\left[-\frac{2}{3}(5x-2)^{-\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

§ 8.3 求不定积分的基本方法

应用基本积分表和不定积分运算法则只能求少数很简单函数的不定积分．为此，有必要进一步研究求不定积分的方法．这一节将介绍的换元积分法（亦称变量代换法）和分部积分法就是求不定积分的最基本方法．使用这两种方法的目的，是将被积函数简化，使之直到能应用基本积分表中的公式．

一 换元积分法

定理8.4（第一种换元法） 如果函数$F(t)$是函数$g(t)$的原函数，且 $t = \varphi(x)$ 可微，则$F[\varphi(x)]$是 $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数，且有

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int g(t) dt. \tag{8.7}$$

证明 因为，根据复合函数的链式法则有

$$(F[\varphi(x)])' = F'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

所以$F[\varphi(x)]$是 $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数. 另外，由已知条件 $\int g(t)dt = F(t) + C$，故有

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = F(t) + C$$

$$= \int g(t)dt,$$

这就证明了公式（8.7） □

例 1 求$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$.

解 令 $\ln x = t$，有$\frac{1}{x}dx = dt$，于是

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

例 2 求$\int \frac{dx}{a^2+x^2}(a\neq 0)$.

解 因为

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]},$$

令 $\frac{x}{a} = t$，有 $\frac{1}{a}dx = dt$. 于是

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{dx}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}\text{arctg}t + C$$

$$= \frac{1}{a}\text{arctg}\ \frac{x}{a} + C.$$

例 3　求 $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx\ (a \neq 0)$.

解　因为

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

所以有

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right]. \quad (1)$$

令$x - a = t$，有 $dx = dt$。于是

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_1$$

$$= \ln|x-a| + C_1.$$

令　$x + a = t$，有$dx = dt$。于是

$$\int \frac{1}{x+a}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_2$$

$$= \ln|x+a| + C_2.$$

将此结果都代入（1）式，故得

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C_1 + C_2$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ \ (C = C_1 + C_2).$$

例 4　求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx\ (a > 0)$.

解　因为

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}},$$

令$\frac{x}{a}=t$，有$\frac{1}{a}dx=dt$。于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{dx}{a}=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\arcsin t+C$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

例 5　求$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$。

解　令$\sqrt{x}=t$，即$x=t^2$，有$dx=2tdt$。于是

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{e^t}{t}2tdt=2\int e^tdt=2e^t+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}+C.$$

通过上述诸例，现将用第一种换元法求不定积分总结如下：比如要求的不定积分为：

$$\int f(x)dx,$$

首先，要从被积函数$f(x)$中分出一个因子$\varphi'(x)$，使$\varphi'(x)dx$凑成中间变量的微分，即$dt=\varphi'(x)dx$，于是不定积分$\int f(x)dx$的被积表达式可写成：

$$f(x)dx=g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=g(t)dt,$$

其次，利用基本积分表计算积分$\int g(t)dt$。通常把这种凑成微分形式而达到求积分的方法称之为**凑微分法**。而且当使用凑微分法比较熟练之后，可不必写出中间变量t，这样可简化求不定积分的步骤。

例 6　求$\int \operatorname{tg}x dx$。

解　因为

$$\operatorname{tg}x dx = \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{-d(\cos x)}{\cos x},$$

所以　$$\int \operatorname{tg}x dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

例 7　求$\int \frac{1}{\sin x}dx$。

解　$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

$$= \ln|\csc x - \operatorname{ctg}x| + C.$$

例8　求$\int \sec x dx$。

解　$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + C.$$

例 9　求$\int\frac{xdx}{1-2x^2}$.

解　$\int\frac{xdx}{1-2x^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-2x^2}d(1-2x^2)$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-2x^2|+C.$$

例10　求$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解　$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2}d(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2)$$

$$=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\sqrt{1+x^2}+C.$$

在使用第一种换元积分法时，关键是设法引进中间变量t，使被积表达式$f(x)dx$凑成$g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$. 然而，有些不定积分$\int f(x)dx$，适当选择函数$x=\varphi(t)$（实际上是引进新变量$t$）代入后，使之不定积分$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$容易求得. 为此给出第二种换元法.

定理8.5（第二种换元法）　如果函数$x=\varphi(t)$是单调和可微的，且$\varphi'(t)\neq0$，以及$F(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数，则$F[\varphi^{-1}(x)]$是$f(x)$的原函数，且有

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (8.8)$$

证明　根据复合函数和反函数的求导数法则，得

$$(F[\varphi^{-1}(x)])'=\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=f[\varphi(t)]=f(x),$$

故$F[\varphi^{-1}(x)]$是$f(x)$的原函数. 另外，由于已知条件

$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C$，因此有

$$\int f(x)dx = F[\varphi^{-1}(x)] + C = F(t) + C$$

$$= \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \qquad \square$$

这就证明了公式（8.8）.

例11　求$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a>0)$.

解　令$x = a\sin t$，有$dx = a\cos t dt$. 另外，且保证函数 $x = a\sin t$是单调的，必限制 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，在此区间内$\cos t \geqslant 0$，故有

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t.$$

当$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时，存在反函数 $t = \arcsin\frac{x}{a}$，从而

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t \cdot a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是有

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{a^2}{4}\sin 2t + \frac{a^2}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

例12　求$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx$ $(a>0)$.

解　令$x = a\operatorname{tg} t$，有$dx = a\sec^2 t dt$，从而

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = \int \frac{a\sec^2 t\,dt}{\sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt$$

$$= \int \sec t\,dt,$$

由本节的例 8，得

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln|\sec t + \mathrm{tg}\, t| + C_1.$$

为了把 $\sec t$ 和 $\mathrm{tg}\, t$ 都换成 x 的函数，将 $\mathrm{tg}\, t = \frac{x}{a}$ 作一直角三角形（如图8.2），故有

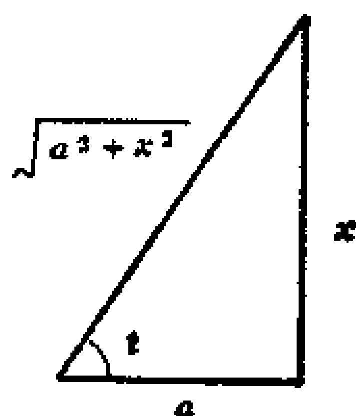


图8.2

$$\sec t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C,$$

其中$C = C_1 - \ln a$.

例13 求$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$ $(a>0)$.

解 方法 1 令$x = a\sec t$，有

$$dx = a\sec t\cdot \mathrm{tg}\, t dt,$$

以而 $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \sec t dt$$

$$= \ln|\sec t + \mathrm{tg}\, t| + C_1.$$

现以$\sec t = \frac{x}{a}$作一直角三角形（如图8.3）故有

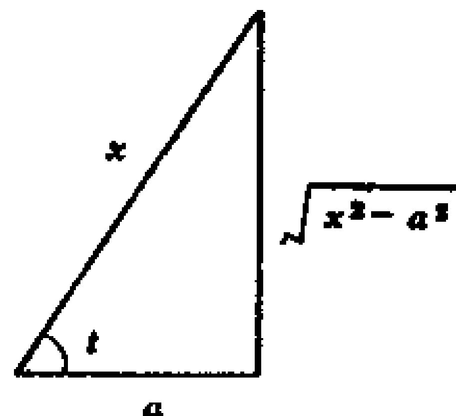


图8.3

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,$$

其中$C = C_1 - \ln a$。

方法 2　令$x = a\mathrm{ch}t$ ($x>a$, $t>0$)，有 $dx = a\mathrm{sh}t dt$，

从而　$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\mathrm{sh}t}{a\mathrm{sh}t}dt = \int dt = t + C_1.$$

为变量还原，需从方程

$$x = a\mathrm{ch}t = a\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

即　$$ae^{2t} - 2xe^t + a = 0$$

中解得

$$e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

取自然对数后得

$$t = \ln\left(\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

为使 $t>0$，根号前面必须取正号，即

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C,$$

其中$C = C_1 - \ln a$。

例13的两种方法表明：在使用第二种换元法求不定积分时，对代换$x = \varphi(t)$ 可以选取不同的函数。这样一来，换元法具有较大的灵活性。

以上例11，例12和例13是用三角函数作为变量代换的，故称之为三角代换。使用三角代换，求如下的三种类型的不定积分较为简便：

（1）如果被积函数含有因子$\sqrt{a^2-x^2}$，则可令
$x=a\sin t$（或 $x=a\cos t$）；

（2）如果被积函数含有因子$\sqrt{a^2+x^2}$，则可令
$x=a\operatorname{tg}t$（或$x=a\operatorname{ctg}t$）①；

（3）如果被积函数含有因子$\sqrt{x^2-a^2}$，则可令
$x=a\sec t$（或$x=a\csc t$）。

到此为止，我们将上述诸例的结果作为公式，再增补到基本积分表中，它们是：

17 $\int \operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$；

18 $\int \operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$；

19 $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$；

20 $\int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\operatorname{ctg}x|+C$；

21 $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\quad(a\neq0)$；

22 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(a\neq0)$；

23 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

24 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C\quad(a>0)$；

25 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\,(a>0)$；

① 对于积分$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$，由于计算较烦，故放入例题选讲中；但在下段里，将用分部积分法给予计算。

26 $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

二　分部积分法

已知函数$u(x)$，$v(x)$具有连续导数，根据两个函数乘积的导数公式有

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

移项后，得

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对此等式两边取不定积分得

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx. \tag{8.9}$$

公式(8·9)称为**分部积分公式**。它适用于求不定积分$\int u'vdx$比求不定积分$\int uv'dx$容易的场合，且在使用中应注意以下两条原则：第一要使从v'确定v的计算比较简便；第二应使不定积分$\int u'vdx$变得容易积分。

为了简便，可把公式(8·9)写成如下形式

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{8.10}$$

例14　求$\int x\sin xdx$。

解　根据公式(8.9)设

$$u=x,\quad v'=\sin x,$$

得

$$u'=1,\quad v=-\cos x.$$

于是有

$$\int x\sin xdx=-x\cos x-\int -\cos xdx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

例15　求$\int x^2e^xdx$。

解　根据公式(8.9)设

$$u=x^2,\quad v'=e^x,$$

得

$$u'=2x,\quad v=e^x.$$

于是有

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx. \tag{2}$$

我们不难发现等式的右边虽出现不定积分$\int xe^xdx$，但是，关于x的次幂已降低一次，根据公式（8.9），又可设

$$u=x,\quad v'=e^x,$$

得

$$u'=1,\quad v=e^x.$$

于是有

$$\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx$$

$$=xe^x-e^x+C.$$

代入（2）式，最后得

$$\int x^2e^xdx=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

在例14和例15中，由于被积函数的第一个因式是正整数幂的幂函数，它们的导数易求，其导数不仅是幂函数，并且次数降低一次；而第二个因式的原函数易求，故在使用公式（8.9）时，须令第一个因式为u,第二个因式为v'。

例16　设$\int x\ln xdx$。

解　设　$u=\ln x,\quad v'=x,$

得

$$u'=\frac{1}{x},\quad v=\frac{x^2}{2}$$

于是有

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

例17 求$\int \operatorname{arctg}x dx$。

解 设 $u=\operatorname{arctg}x$, $v'=1$。

得 $$u'=\frac{1}{1+x^2},\quad v=x.$$

于是有

$$\int \operatorname{arctg}x dx=x\operatorname{arctg}x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

在例16和例17中，由于被积函数的第二个因式分别是$\ln x$和$\operatorname{arctg}x$，它们的导数易求，其导函数是有理函数；而第一个因式是幂函数（常数1看作幂函数x^0），其原函数易求，故在使用公式（8.9）时，须令第二个因式为u，第一个因式为v'。这样做虽然v的幂升高了，但是vu'的原函数易求，所以也完全适用公式（8.9）的两条原则。

在此基础上又可总结出，如下类型的被积函数均应用分部积分法求其原函数：

$x^n\ln^m x$，$p_n(x)\ln^m x$，$x^k\ln^m x$ $(k\neq -1)$；

$x^n e^{ax}$，$p_n(x)e^{ax}$；

$x^n\sin bx$，$p_n(x)\sin bx$；

$x^n\cos bx$，$p_n(x)\cos bx$，

其中 n，$m\in N$，$a,b,k\in R$，$p_n(x)$是n次多项式。

在使用分部积分法时，常常出现这种情况，即分部积分后（一次或多次使用）又出现原来欲求的不定积分，这时将欲求的不定积分合并，就可得到所要求的不定积分。

例18 求$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$。

解 设 $u=\sqrt{x^2+a^2}$，$v'=1$，

得 $$u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad v=x.$$

于是

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

$$+\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.$$

此时等式右端的第二项与欲求的不定积分一样，而第三项与基本积分表公式24一样，故得

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

例19 求不定积分

$$I_1=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,$$

$$I_2=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

解 设

$$u=\cos\beta x,\quad v'=e^{\alpha x},$$

得 $$u'=-\beta\sin\beta x,\quad v=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}.$$

于是有

$$I_1=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}I_2.$$

(3)

对I_2再进行分部积分，设

$$u=\sin\beta x,\quad v'=e^{\alpha x},$$

得

$$u'=\beta\cos\beta x,\quad v=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}.$$

于是有

$$I_2=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}I_1. \quad (4)$$

解出（3）和（4）组成的联立方程组，得

$$I_1=\frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C,$$

$$I_2=\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

如果在欲求的不定积分中含有参数$n\in N$，使用一次分部积分法后，等式的右端也常常出现含有参数$n-1$或$n-2$的不定积分，从而可建立递推公式。

例20 求不定积分$I_n=\int x^n e^x dx$。

解 设 $u=x^n$，$v'=e^x$，

得 $u'=nx^{n-1}$，$v=e^x$。

于是，得到如下的递推公式：

$$I_n=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx=x^n e^x-nI_{n-1}.$$

因为$I_0=\int e^x dx$和$I_1=\int xe^x dx$都是已知的，所以经过有限次使用递推公式，总会求得I_n的。

§ 8.4　有理函数和可化为有理函数的积分法

本节将讨论一些特殊类型的初等函数的积分法，并指出：任何有理函数都存在原函数，且仍是初等函数.

一个函数的原函数可用初等函数表示时，把该原函数叫做可表为有限形式.

一　有理函数的分解

在第一章的学习指导中我们已经指出，有理函数包括有理整函数（即多项式）和有理分函数，而在有理分函数中，又包括有理真分式和有理假分式. 由于任何一个有理假分式都可以化为一个多项式与一个有理真分式之和.

所谓的有理真分式的分解，就是将有理真分式化成部分分式（即分项分式）. 现给出代数学中的部分分式的结果如下：

设函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理真分式.

（1）如果多项式 $Q(x)$ 有 a 的 k 重根，则在 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解中必含有如下形式的部分分式

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k},\tag{1}$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots k)$ 为待定的系数.

（2）如果多项式有一对 k 重的共轭复根，即 $Q(x)$ 有因子 $(x^2+2px+q)^k$ $(p^2-q<0)$，则在 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解中必含有如下形式的部分分式

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+2px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+2px+q)^k}\tag{2}$$

其中的B_i、C_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 均为待定的系数。

例如，将有理真分式

$$\frac{4}{x^3+4x}$$

分解成部分分式。

解　因为$Q(x)=x^3+4x=x(x^2+4)$，所以有

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

其中的A,B 和C是待定的系数。我们采用待定系数法有

$$4=A(x^2+4)+(Bx+C)x,$$

令x 的同次幂的系数相等，得

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,$$

于是

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}.$$

二　有理函数的积分

根据上段的（1）和（2），可以得到如下之结论：求任何有理函数不定积分，可归结为求多项式的不定积分和如下四种类型最简分式的不定积分

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Bx+C}{x^2+2px+q},\ \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^k},$$

其中A,B,C p,q,a均为常数，$p^2-q<0$；$k\in N$。

现在分别讨论这四种类型的最简分式的不定积分。

1　$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

2　$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

3　求$\int\frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx$.

首先将分母配成完全平方

$$x^2+2px+q=x^2+2px+p^2+q-p^2$$
$$=(x+p)^2+(q-p^2).$$

由于$p^2-q<0$，因此$q-p^2>0$，设$q-p^2=a^2$。

然后作代换，令$x+p=t$，而$dx=dt$，于是有

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x+p)^2+a^2}dx$$

$$=\int\frac{Bt+C-Bp}{t^2+a^2}dt$$

$$=B\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+(C-Bp)\int\frac{1}{t^2+a^2}dt$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{C-Bp}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C_1$$

$$=\frac{B}{2}\ln|x^2+2px+q|+\frac{C-Bp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$$
$$+C_1.$$

4　求$\int\frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^k}dx$.

做法与第三种类型情况相同。配方、作代换后可化成

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^k}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt$$
$$+(C-Bp)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

等式右端的第一个积分是

$$\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt=\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k}+C_1$$

$$=\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+C_1$$

$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+2px+q)^{k-1}} + C_1.$$

而等式右端的第二个积分可变形如下。

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^k}dt$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

对右端的第二个积分用分部积分法，设

$$u = t, \quad v' = \frac{t}{(t^2+a^2)^k}$$

得 $$u' = 1, \quad v = \frac{-1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

于是

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = -\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}$$

$$+\frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}dt$$

$$= -\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}$$

$$+\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1},$$

代入上式得I_k的递推公式：

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$$

从而，以上四种类型的不定积分可表为有限形式。于是，任何有理函数的不定积分都可表为有限形式，即任何有理函数皆存在原函数，且仍是初等函数。

例 1 求$\int \frac{4}{x^3+4x}dx$.

解 在本节的第一段已将$\frac{4}{x^3+4x}$分解如下:

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4},$$

于是有

$$\int \frac{4}{x^3+4x}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{x}{x^2+4}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$$

例 2 求$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$.

解 因为$Q(x)=(x-1)(x^2+1)^2$,所以有

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

故得

$$x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)$$
$$+(Dx+E)(x-1).$$

令等式两端x的同次幂的系数相等，得如下方程组

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=0 \\ 2A+B-C+D=0 \\ -B+C-D+E=1 \\ A-C-E=1. \end{cases}$$

从中解得

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=-1,\ E=0.$$

于是

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2(x^2+1)} + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C_1.$$

三　三角函数有理式的积分法

我们知道，任何有理函数的不定积分均可表示成有限形式。因此，求某些函数的不定积分，只要采用适当的代换，将被积函数化成有理函数，这种方法通常称之为被积函数的有理化。本段将要讨论的三角函数有理式的积分法和下段的简单无理函数的积分法均属这类问题。

由于三角函数$\mathrm{tg}x$，$\mathrm{ctg}x$，$\sec x$和$\csc x$均可用$\sin x$和$\cos x$表出，因此，讨论三角函数有理式的不定积分问题，就归结为求型如

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx \tag{8.11}$$

的不定积分，其中$R(\sin x,\ \cos x)$表示以$\sin x$和$\cos x$为变元的有理式。

求型如(8.11)的不定积分，可通过代换（即万能代换）

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi)$$

将被积函数有理化。事实上

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dt=\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx,$$

$$dx=2\cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

于是不定积分(8.11)可化成关于 t 的有理函数积分。

例 3 求$\displaystyle\int\frac{\operatorname{ctg}x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

解 应用万能代换将被积表达式有理化：设

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

得
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{1-t^2}{2t},$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

于是

$$\int\frac{\operatorname{ctg}x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{2t}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}.$$

$$\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int \frac{1-t^2}{t(2t+2)}dt=\int \frac{1-t}{2t}dt$$

$$=\int \frac{1}{2t}dt-\int \frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

通过万能代换可将型如(8.11)的不定积分表为有限形式，它在理论上却有重要意义。然而，应用万能代换求型如 $R(\sin x,\ \cos x)$ 的不定积分未必简便，为此我们将介绍：

（1）如果（8.11）是型如

$$\int R(\sin^2 x,\ \cos^2 x)dx$$

的不定积分，则可用代换 $t=\operatorname{tg}x$，这时有

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt.$$

（3）如果（8.11）是型如

$$\int R(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x dx$$

的不定积分，则可用代换 $t=\sin x$，这时有

$$\sin x=t,\ \cos^2 x=1-t^2,\ \cos x dx=dt.$$

（3）如果（8.11）是型如

$$\int R(\sin^2 x,\ \cos x)\cdot\sin x dx$$

的不定积分，则可用代换 $t=\cos x$，这时有

$$\sin^2 x=1-t^2,\ \cos x=t,\ -\sin x dx=dt.$$

例 4　求 $\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}dx$.

解 由于$R(\sin^2 x,\ \cos^2 x)=\dfrac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}$，

因此可设 $t=\mathrm{tg}x$，得

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt.$$

于是

$$\int\frac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}+1}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\int(2t^2+1)dt$$

$$=\frac{2}{3}(\mathrm{tg}x)^3+\mathrm{tg}x+C.$$

例 5 求$\int\sin x\cos^3 x dx$.

解 由于$R(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x=(\sin x\cdot\cos^2 x)\cos x$，
因此可设 $t=\sin x$，得

$$\cos^2 x=1-t^2,\ \cos x dx=dt.$$

于是

$$\int\sin x\cos^3 x dx=\int t(1-t^2)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4+C$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$$

例 6 求$\int\dfrac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$.

解 由于 $R(\sin^2 x,\ \cos x)\sin x=\left(\dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\right)\sin x$，

因此可设 $t=\cos x$，得

$$\sin^2 x=1-t^2,\ -\sin x dx=dt.$$

于是

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt$$

$$= -\int \frac{1}{t^4}dt + 2\int \frac{1}{t^2}dt - \int 1dt$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$$

四　简单无理函数的不定积分

求简单无理函数的不定积分，也是通过适当的代换，把被积函数化成有理函数，进而求其不定积分。

1　型如$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$的积分。

被积函数$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$表示以$x$和$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$为变元的有理函数，其中$a, b, c, d$是常数，$n \in N$，但$n \neq 1$。

对这种类型的积分，通过代换$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$可达到被积函数有理化的目的。事实上，从代换中可解出

$$x = \frac{dt^n - a}{a - ct^n},$$

进而求得

$$dx = \frac{ad-bc}{(a-ct^n)^2}nt^{n-1}dt$$

于是，可把$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$化成被积函数为有理函数的不定积分。

例 7 求$\int \frac{(x+1)}{x\sqrt{x-2}}dx$。

解 由于$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)=\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}$，即$n=2$，$a=1$，$b=-2$，$c=0$，$d=1$，因此可设

$$t=\sqrt{x-2},$$

解得 $x=t^2+2$，从而$dx=2tdt$。

于是

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx=\int \frac{t^2+2+1}{(t^2+2)t}2tdt$$

$$=2\int \frac{t^2+2}{t^2+2}dt+2\int \frac{1}{t^2+2}dt$$

$$=2t+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$$

例 8 求$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}dx$。

解 由于$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}(x+1)^3}}=\frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},$$

因此可设

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},$$

解得

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ \text{从而}\quad dx=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

于是

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}dx = \int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$$

$$= \int \frac{(t^3-1)t}{2t^3}\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt = \int \frac{-3}{t^3-1}dt.$$

再用有理函数的积分法求这个积分．因为 $Q(t) = t^3-1 = (t-1)(t^2+t+1)$，所以有

$$\frac{-3}{t^3-1} = \frac{-3}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

故得

$$-3 = (A+B)t^2 + (A-B+C)t + (A-C),$$

令等式两端 t 的同次幂的系数相等，得如下方程组

$$\begin{cases} A+B \qquad = 0 \\ A-B+C = 0 \\ A- \qquad C = -3, \end{cases}$$

从中解得

$$A = -1,\ B = 1,\ C = 2.$$

于是

$$-\int \frac{3}{t^3-1}dt = -\int \frac{1}{t-1}dt + \int \frac{t+2}{t^2+t+1}dt \qquad (3)$$

而

$$-\int \frac{1}{t-1}dt = -\ln|t-1| + C_1 = -\frac{1}{2}\ln(t-1)^2 + C_1$$

$$\int \frac{t+2}{t^2+t+1}dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2}{t^2+t+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C_2,$$

代入（3）式得

$$-\int\frac{3}{t^3-1}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{|t^2+t+1|}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

再换成变量x，最后求得

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right|}{\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^2}$$

$$+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例 9　求$\int\frac{(x-1)}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}dx$。

解　不难看出，在被积函数中的根式$\sqrt{x}$和$\sqrt[3]{x^2}$的根指数的最小公倍数为 6，因此被积函数实际上还是$R(x,\ \sqrt[6]{x})$的形式，故可设

$$t=\sqrt[6]{x}$$

解得$x=t^6$，而 $dx=6t^5dt$。

于是

$$\int\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}dx=\int\frac{t^6-1}{(t^3+t^4)t^6}\cdot 6t^5dt$$

$$=\int\frac{6(t^6-1)}{t^4(t+1)}dt$$

$$=6\int(t-1+t^{-1}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4})dt$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)+C$$

$$=6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)$$

$+C$。

2　型如$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$的积分。

对于这种类型的积分，可把ax^2+bx+c配成完全平方，通过适当的代换可归结为§8.3的公式23至26的积分。

例10　求$\int\frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx$。

解　由于$2x^2+4x+5=2(x+1)^2+3$，因此可设

$t=x+1$，而$x=t-1$，且 $dx=dt$。

于是

$$\int\frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx=\int\frac{x-2}{\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t-3}{\sqrt{t^2+\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{2}}}dt-\frac{3}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+\frac{3}{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}\right|$$

$+C$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+5}-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}(x+1)\right.$$

$$\left.+\sqrt{2x^2+4x+5}\right|+C_1,$$

此中$C_1=C-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2}$。

例11　求$\int(x+1)\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$。

解　由于$x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，因此设

$t=x-1$，而 $x=t+1$，且 $dx=dt$。

于是

$$\int(x+1)\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=\int(t+2)\sqrt{t^2-2}\,dt$$

$$=\int t\sqrt{t^2-2}\,dt+2\int\sqrt{t^2-2}\,dt$$

$$=\frac{1}{3}(t^2-2)^{\frac{3}{2}}+t\sqrt{t^2-2}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}[(x-1)^2-2]^{\frac{3}{2}}+(x-1)\sqrt{(x-1)^2-2}$$

$$-2\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2-2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-2x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}$$

$$-2\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C。$$

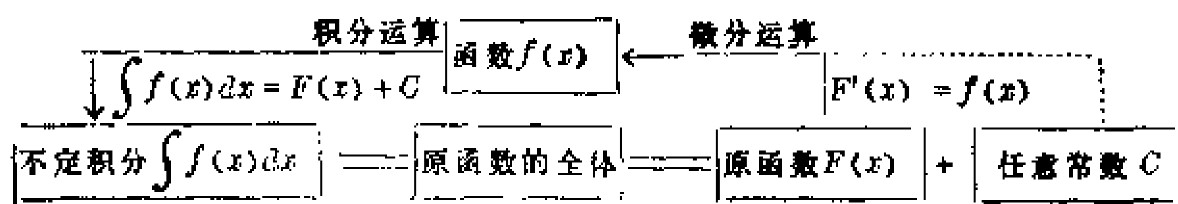
学 习 指 导

一 内容概要

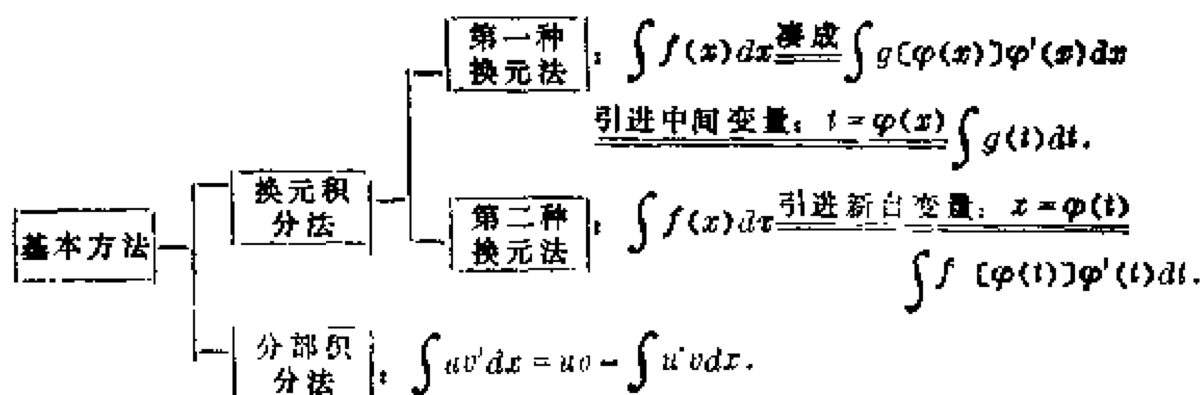
1 重点及要求

与其它各章相比较，本章的概念和理论是比较简单的，理解和掌握它也是比较容易的。然而，本章的重点是不定积分的积分法。如何才能较熟练地掌握它呢？我们认为下述要求都是必要的：熟记基本积分表中的26个公式；熟练地掌握求不定积分的两种方法——换元积分法和分部积分法；要明确任何有理函数的不定积分都可表示成初等函数，且三角函数有理式的积分法和简单无理函数的不定积分可通过换元法化为有理函数的不定积分。读者还要做一定数量的练习题，这样才能掌握解题的方法和提高熟练程度。

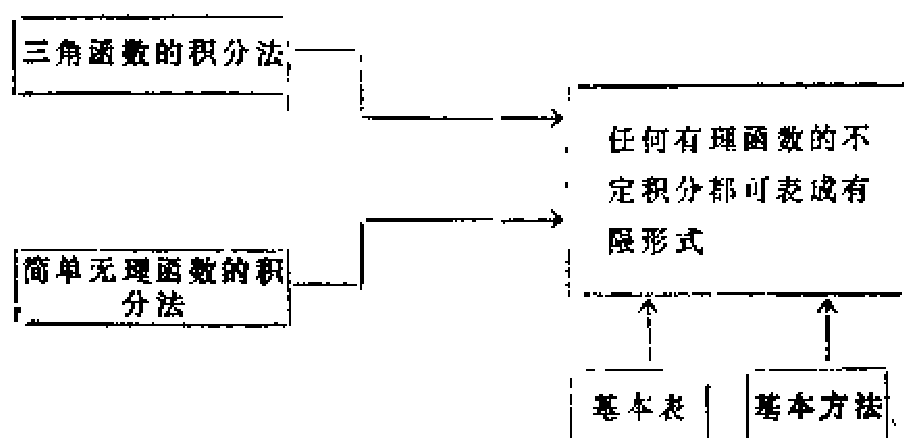
2 原函数、不定积分与两种运算(微分、积分)的关系



3 求不定积分的基本方法



4　有理函数和可化为有理函数的积分法



二　几点说明

1　不定积分是否均可表成有限形式

到此为止，我们对积分法作了较系统的介绍，相当多数的函数，它的原函数可用初等函数表示出来．然而，有许多初等函数，虽然它们的原函数都存在，但是这些原函数不能表成初等函数．例如，不定积分：

$$\int \frac{1}{\ln x}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx,$$

$$\int \cos^2 dx,\ \int \sin x^2 dx \text{等等．}$$

特别应当指出的，以下三种椭圆积分都不能表成初等函数．这些椭圆积分是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi,$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\int \frac{1}{(1+k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi,$$

其中的参数$k\in(0,1)$，通常分别称为第一、第二、第三型椭圆积分，它们在求椭圆弧长中碰到的．

2　不定积分的形式不是唯一的

求一个函数的不定积分，由于使用的方法不同，因此，其积分结果在形式上常常也是不同的．例如，求不定积分

$$\int \sin x\cos x dx,$$

当用凑微分法时，可得

$$\int \sin x\cos x dx=\int \sin x d\sin x=\frac{1}{2}\sin^2 x+C, \quad (1)$$

$$\int \sin x\cos x dx=-\int \cos x d\cos x=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C. \quad (2)$$

当用倍角公式时，可得

$$\int \sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C. \quad (3)$$

我们不难验证，上述三个结果都是正确的．对有些结果予以适当的变形，它们是可以统一起来，事实上，（3）可化为（1）：

$$-\frac{1}{4}\cos 2x+C=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}+C_1$$
$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)+C_1$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2 x+C_1,$$

其中$C_1=C-\frac{1}{4}$；（1）可化为（2）：

$$\frac{1}{2}\sin^2 x+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$$
$$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C_2,$$

其中$C_2=C+\frac{1}{2}$.

因此，在求不定积分时，其结果与答案在形式上不同不要轻易加以否定。检验它是否正确，看其导数是否等于被积函数．

3　再说"凑微分法"

因为"凑微方法"就是第一种换元积分法的别称，所以有的书根本不提"凑微分法"，只说：当对第一种换元积分法比较熟练时，令其中间变量的步骤可以省略，在形式上会用

$$f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = g(t)dt$$

即可．例如，求不定积分

$$\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin 2x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}x}{2\sin x\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1+\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}d(\operatorname{tg}x)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)d(\operatorname{tg}x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1d(\operatorname{tg}x) + \int\frac{1}{\operatorname{tg}x}d(\operatorname{tg}x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x| + C.$$

使用"凑微分法"的主要目的，在于求不定积分的计算简便易行．例如，求不定积分

$$\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(3x^2-5x+6)^{-\frac{1}{2}}d(3x^2-5x+6) = \sqrt{3x^2-5x+6}+C;$$

$$\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}dx$$

$$= \int (x^2 + x\sqrt{x^2-1})dx$$

$$= \int x^2dx + \int x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,d(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

但是，在求不定积分

$$\int\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sin x\cos x}dx,$$

时，比较下面两种方法，不难发现，"凑微分法"有一定的难度。

用第一种换元法	用"凑微分法"
$\int\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sin x\cos x}dx$	$\int\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sin x\cos x}dx$
$=\int\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x\cos^2x}dx$	$=\int\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x\cos^2x}dx$
$\underline{\underline{令t=\mathrm{tg}x}}\int\frac{\ln t}{t}dt$	$=\int\ln\mathrm{tg}x\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}x\cos^2x}dx$
$\underline{\underline{令u=\ln t}}\int u\,du$	$=\int\ln\mathrm{tg}x\,d(\ln\mathrm{tg}x)$
$=\frac{1}{2}u^2+C$	$=\frac{1}{2}(\ln\mathrm{tg}x)^2+C,$
$=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C$	其中$\frac{1}{\mathrm{tg}x\cos^2x}dx=d(\ln\mathrm{tg}x)$
$=\frac{1}{2}(\ln\mathrm{tg}x)^2+C$	

三　例题选讲

例1　求$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$.

基本思路　在包含二项式x^2+a^2，x^2-a^2，a^2-x^2的表达式的积分中，也常用三角代换或双曲代换，在代换中并用关系式

$$\sin^2t+\cos^2t=1,\ 1+\mathrm{tg}^2t=\sec^2t=\frac{1}{\cos^2t},$$

$$\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t=1,\ 1-\mathrm{th}^2t=\frac{1}{\mathrm{ch}^2t}.$$

解　令 $x=a\mathrm{tg}t$，有

$$dx=\frac{a\,dt}{\cos^2t},\ 且x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2t}.$$

从而

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt=\frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{a^3}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C_{\circ}$$

在变量还原时，利用作直角三角形法是比较简单的，如图8.2示，故知

$$\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad \cos t=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

于是

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{ax}{x^2+a^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+C$$

例 2 求$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$。

基本思路 因为与§8·3第一段的总结（3）相同，所以用三角代换.

解 令$x=\sqrt{2}\sec t$，有

$dx=\sqrt{2}\sec t\cdot \operatorname{tg} t dt$，

从而 $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx=\int \frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\operatorname{tg} t}\cdot \sqrt{2}\sec t\operatorname{tg} t dt$$

$$=2\int \sec^3 t dt。$$

对积分$\int \sec^3 t dt$应用分部积分法，得

$$\int \sec^3 t dt=\sec t\cdot \operatorname{tg} t-\int \operatorname{tg} t\cdot \sec t\operatorname{tg} t dt$$

$$=\sec t\cdot \mathrm{tg}t-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$=\sec t\cdot \mathrm{tg}t+\int\sec t dt-\int\sec^3 t dt$$

$$=\sec t\cdot \mathrm{tg}t+\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|-\int\sec^3 t dt,$$

移项合并欲求的不定积分，得

$$\int\sec^3 t dt=\frac{1}{2}(\sec t\cdot \mathrm{tg}t+\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|).$$

在变量还原时，因$x=\sqrt{2}\sec t$，所以 $\mathrm{tg}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$，

故得

$$\int\sec^3 t dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|\right).$$

于是

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C_1,$$

其中$C_1=C-\ln\sqrt{2}$.

例3 求$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$.

基本思路 同例1.

解 令$x=a\mathrm{tg}t$，有$dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$，从而

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\int a^2\mathrm{tg}^2 t\cdot\frac{a}{\cos t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt$$

$$=a^4\int(\sec^2 t-1)\sec^3 t dt$$

$$=a^4\int\sec^5 t dt-a^4\int\sec^3 t dt.$$

由于

$$\int \sec^5 t dt = \sec^3 t \cdot \mathrm{tg} t - 3\int \sec^3 t \,\mathrm{tg}^2 t dt$$

$$= \sec^3 t \cdot \mathrm{tg} t - 3\int \sec^5 t dt + 3\int \sec^3 t dt,$$

因此可得

$$\int \sec^5 t dt = \frac{1}{4}(\sec^3 t \cdot \mathrm{tg} t + 3\int \sec^3 t dt.$$

注意应用例 2 的结果，于是

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^4}{4}(\sec^3 t \cdot \mathrm{tg} t - \int \sec^3 t dt)$$

$$= \frac{a^4}{4}\left[\sec^3 t \cdot \mathrm{tg} t - \frac{1}{2}(\sec t \cdot \mathrm{tg} t + \ln|\sec t + \mathrm{tg} t|)\right] + C$$

变量还原后，故得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\frac{a^4}{8}\ln\frac{|x+\sqrt{a^2+x^2}|}{|a|} + C$$

例 4　求$\int x^k \ln x dx$，其中k 是常数，且$k \neq -1$.

基本思路　用分部积分法.

解　设　$u = \ln x$，$v' = x^k$，

得　$u' = \dfrac{1}{x}$，$v = \dfrac{1}{1+k}x^{1+k}$.

于是

$$\int x^k \ln x dx = \frac{1}{1+k}x^{1+k}\ln x - \int \frac{x^{1+k}}{1+k} \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{1+k}x^{1+k}\ln x - \frac{1}{(1+k)^2}x^{1+k} + C$$

$$= \frac{x^{1+k}}{1+k}\left(\ln x - \frac{1}{1+k}\right) + C.$$

例 5　求不定积分

$$I_m = \int x^k \ln^m x dx$$

的递推公式，其中k 是常数，且$k \neq -1$，$m \in N$。

基本思路 用分部积分法。

解 设 $u = \ln^m x, v' = x^k$，

得 $$u' = m\ln^{m-1}x \cdot \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{1+k}x^{1+k}.$$

于是

$$\int x^k \ln^m x dx = \frac{1}{1+k}x^{1+k}\ln^m x - \frac{m}{1+k}\int x^k \ln^{m-1} x dx,$$

故得

$$I_n = \frac{1}{1+k}x^{1+k}\ln^m x - \frac{m}{1+k}I_{m-1}.$$

例 6 求不定积分

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

的递推公式，其中 $n \in N$。

基本思路 先将被积函数变形，然后应用分部积分法。

解 因为

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx,$$

对等式右端的第二个积分用分部积分法。设

$$u = x, \quad v' = \frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

得 $$u' = 1, \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

所以得

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

于是

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$$

特别地，当已知

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

时，应用上述公式不难求得

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

下面将给出型如$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的一般方法，通常称之为欧拉① 变换. 对二次三项式ax^2+bx+c总可认为没有等根，否则就不属$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型的积分. 用欧拉变换可达到被积函数有理化的目的.

1　欧拉第一变换

当$ax^2+bx+c=0$无实根时，即$b^2-4ac<0$，以此推知a与c

---

① 欧拉：Euler，L.瑞士数学家，1707—1783.

同号（否则 $b^2-4ac>0$）。又因为

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

所以ax^2+bx+c对所有x 来说与a 同号，当然也与c 同号. 另外，由于在被积函数中含有$\sqrt{ax^2+bx+c}$，因此a 为正（否则 $ax^2+bx+c<0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}$无意义）.

总之，当$b^2-4ca<0$时，有$a>0$，且$c>0$。欧拉第一变换为

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\ \pm\sqrt{a}\ x$$

$$(\text{或}\ \sqrt{ax^2+bx+c}=xt\ \pm\sqrt{c}\ )。$$

2　欧拉第二变换

当$ax^2+bx+c=0$有相异实根α 和 β 时，欧拉的第二变换为

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$$

$$(\text{或}\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\beta))。$$

例 7　求$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

基本思路　用欧拉第一变换.

解　由于$b^2-4ac=1-4=-3<0$, 且 $a=1>0$ （当然 $c=1>0$），因此令

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x.$$

解得

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\ \text{及}\ dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt.$$

于是

$$I=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{2(t^2-t+1)}{t(2t-1)^2}dt$$

应用待定系数法，可将等式右端的不定积分化成最简分式形式的不定积分：

$$I=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C.$$

再以$t=x+\sqrt{x^2-x+1}$代入，故得

$$I=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}$$

$$+2\ln|x+2\sqrt{x^2-x+1}|$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+C.$$

例 8　求$\int\frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

基本思路　应用欧拉第二变换.

解　因为a^2-x^2有相异的实根$\pm a$，所以可用欧拉第二变换：

$$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x),$$

解得　　$x=a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$,

且有　　$dx=\dfrac{4at}{(t^2+1)^2}dt$，$\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{t^2+1}$,

$$x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}.$$

代入原积分，从而得到

$$I=\int\frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}dt.$$

根据待定系数法，得

$$I=-\frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{2}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}+\frac{2}{(\sqrt{2}t-1)^2+1}\right]dt$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\int\frac{d(\sqrt{2}t+1)}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}+\int\frac{d(\sqrt{2}t-1)}{(\sqrt{2}t-1)^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}[\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t+1)+\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t-1)]+C$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}+C.$$

再以 $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 代入，并注意 $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}=\pm\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x$ 的使用，于是

$$I=\int\frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C_1,\text{其中的 } C_1=\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}+C.$$

在被积函数中含有因式 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 和 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，除了三角代换和欧拉代换以外，有时用倒代换（即令 $x=\frac{1}{t}$）也是比较方便的。

例 9 求 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$ $(x>0)$。

基本思路 用倒代换法。

解 令 $x=\frac{1}{t}$，有 $dx=\frac{-1}{t^2}dt$。

于是

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=-\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\int\frac{d(1+t^2)}{2\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-\sqrt{1+t^2}+C$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

例10 求$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}dx \quad (x>0)$.

基本思路 用倒代换法.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，有$dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

于是

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}dx=\int \frac{-t}{\sqrt{1+t-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+t-t^2)}{\sqrt{1+t-t^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}}$$

$$=\sqrt{1+t-t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}}dt$$

$$=\sqrt{1+t-t^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{2}-t\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}}$$

$$=\sqrt{1+t-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$=\sqrt{1+t-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2t}{\sqrt{5}}+C$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}\,x}+C.$$

除了在§8.4里介绍的三角函数有理式的积分法以外，下述方法也是值得注意的，

例11 求下列不定积分的递推公式

(1) $I_n=\int \sin^n x dx$； (2) $I'_n=\int \cos^n x dx$ $(n\geqslant 2)$.

基本思路　对I_n和I'_n分别使用分部积分法.

解　设　$u=\sin^{n-1}x$，$v'=\sin x$，

得
$$u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x,\quad v=-\cos x.$$

于是

$$I_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x dx$$

$$-(n-1)\int \sin^n x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

移项合并后，解得

$$I_n=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

同理可得

$$I'_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I'_{n-2}.$$

特别地，

$$I_6=\int \sin^6 x dx=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\frac{5}{6}I_4$$

$$=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}I_2\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x+\frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos x\sin x\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}I_0\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\cos\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+$$
$$C.$$

例12 求下列不定积分的递推公式

(1) $I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}dx$；(2) $I'_n=\int\frac{1}{\cos^n x}dx$ $(n\geqslant 2)$.

基本思路 对I_n和I_n'分别应用分部积分法.

解 由于

$$I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}dx=\int\csc^n x dx=\int\csc^{n-2}x\csc^2 x dx,$$

设 $$u=\csc^{n-2}x,\quad v'=\csc^2 x,$$

得 $$u'=-(n-2)\csc^{n-3}x\cdot\left(\frac{1}{\sin x}\operatorname{ctg}x\right),\quad v=-\operatorname{ctg}x.$$

因此得

$$\begin{aligned}I_n&=-\csc^{n-2}x\cdot\operatorname{ctg}x-(n-2)\int\csc^n x\cdot(1-\sin^2 x)dx\\&=-\csc^{n-2}x\operatorname{ctg}x-(n-2)\int\csc^n x dx\\&\quad+(n-2)\int\csc^{n-2}x dx\\&=-\csc^{n-2}x\operatorname{ctg}x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}.\end{aligned}$$

移项合并后，解得

$$I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

同理可得

$$I_n'=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I'_{n-2}.$$

特别地，

$$\begin{aligned}I_5&=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3\\&=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}-\frac{3}{8}\int\frac{1}{\sin x}dx,\end{aligned}$$

根据§8.3的例7知

$$I_5 = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

有时应用公式：

（1）$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$；

（2）$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$；

（3）$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

来求某些三角函数的不定积分也是比较方便的.

例13 求$\int \sin 5x\cos x dx$.

基本思路 应用上述公式（3）.

解 因为

$$\sin 5x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x),$$

所以

$$\int \sin 5x\cos x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x dx$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

例14 求$\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx$.

基本思路 先用倍角公式，再用上述公式（2）.

解 因为

$$\cos^2 ax\cdot\cos^2 bx = \frac{1}{2}(1+\cos 2ax)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2bx)$$

$$= \frac{1}{4}(1+\cos 2ax + \cos 2bx + \cos 2ax\cos 2bx),$$

所以

$$\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx = \frac{1}{4}\int\Big(1 + \cos 2ax + \cos 2bx$$

$$+\cos 2ax\cos 2bx)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2a}\sin 2ax+\frac{1}{2b}\sin 2bx\right)$$

$$+\frac{1}{8}\int[\cos(2a-2b)x+\cos(2a+2b)x]dx$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8a}\sin 2ax+\frac{1}{8b}\sin 2bx+\frac{1}{16(a-b)}\sin 2(a-b)x$$

$$+\frac{1}{16(a+b)}\sin 2(a+b)x+C。$$

例15 求$\int x|x|dx$。

基本思路 去掉绝对值，分别在$x\geqslant 0$和$x<0$的区间上来求不定积分。

解 因为

$$x|x|=\begin{cases}x^2, & 当x\geqslant 0时,\\ -x^2, & 当x<0时,\end{cases}$$

所以

$$\int x|x|dx=\begin{cases}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C, & 当x\geqslant 0时,\\ -\int x^2dx=-\frac{1}{3}x^3+C, & 当x<0时。\end{cases}$$

于是

$$\int x|x|dx=\frac{1}{3}|x|^3+C。$$

例16 求$\int xf''(x)dx$。

基本思路 用分部积分法。

解 设 $u=x$，$v'=f''(x)$，

得 $u'=1$，$v=f'(x)$。

于是，由公式（8.4）得：

$$\int xf''(x)dx = xf'(x) - \int f'(x)dx$$
$$= xf'(x) - f(x) + C.$$

例17 已知 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$，求 $f(x)$。

基本思路 引进变量代换，再求原函数。

解 令$\sin^2 x = t$，有$f'(t) = 1 - t$，由公式(8.4)知，

$$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2.$$

于是，$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$。

习题

§8.2

1．求下列不定积分：

(1) $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx$；　(2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$；　(4) $\int (1 + \sin x + \operatorname{tg} x)dx$；

(5) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$；　(6) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx$；

(7) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$；　(8) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$。

2．利用公式(8.6)求出下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{x+a}dx$；　(2) $\int \cos mx dx$；

(3) $\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2}dx$；　(4) $\int \frac{1}{1-\cos x}dx$。

§8.3

3．利用第一种换元法（或凑微分法）求下列不定积分：

(1) $\int (2x-3)^{100}dx$；　(2) $\int x^2\sqrt{4-3x^3}dx$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}}dx$;　(4) $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx$;

(5) $\int (2^x+3^x)^2 dx$;　(6) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$;

(7) $\int \operatorname{tg}^{10}x\sec^2 x dx$;　(8) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx$;

(9) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln\sin x}dx$;　(10) $\int \operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(11) $\int \frac{1}{A^2\sin^2 x+B^2\cos^2 x}dx$;　(12) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

(13) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$;　(14) $\int \frac{2x}{(a^2+x^2)^{\frac{2}{3}}}dx$;

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;　(16) $\int e^x\sin e^x dx$;

(17) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;　(18) $\int \ln(\cos x)\operatorname{tg} x dx$;

(19) $\int \cos^2 x dx$;　(20) $\int \cos^3 x dx$;

(21) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;　(22) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$;

(23) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$;　(24) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$;

(25) $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$.

4. 用适当的代换求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$;　(2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$;　(4) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$;　(6) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

(7) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;　(8) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$;

(9) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$； (10) $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$；

(11) $\int\frac{1}{1+e^x}dx$； (12) $\int\frac{4^x+1}{2^x+1}dx$。

5．用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int\ln xdx$； (2) $\int x^3e^{x^2}dx$；

(3) $\int x^2\sin xdx$； (4) $\int\sqrt{x}\ln^2xdx$；

(5) $\int x\mathrm{sh}xdx$； (6) $\int\arcsin xdx$；

(7) $\int\sqrt{x}\ln\sqrt{x}dx$； (8) $\int\cos(\ln x)dx$；

(9) $\int\frac{x}{\cos^2x}dx$； (10) $\int(\arcsin x)^2dx$；

(11) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$； (12) $\int\frac{x}{\sin^2x}dx$。

6．求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2x}dx$； (2) $\int x\ln(4+x^4)dx$；

(3) $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$； (4) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$；

(5) $\int\frac{x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$； (6) $\int\frac{\sin2x}{\sqrt{1+\cos^4x}}dx$；

(7) $\int x^x(1+\ln x)dx$； (8) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}dx$；

(9) $\int f'(2x)dx$；

(10) 已知$f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$。

§8.4

7．求下列有理函数的不定积分：

(1) $\int\frac{x^3}{3+x}dx$； (2) $\int\frac{1}{x^2-x+5}dx$；

(3) $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$;　　(4) $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$;

(5) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 1} dx$;　　(6) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{(x + 3)(x - 1)^2} dx$;

(7) $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$;　　(8) $\int \frac{x^5 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx$.

8．求下列三角函数的不定积分：

(1) $\int \frac{1}{\cos x + 3} dx$;　　(2) $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$;

(3) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$;　　(4) $\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx$;

(5) $\int \frac{1}{(2 + \cos x)\sin x} dx$;　　(6) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

(7) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$;　　(8) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$;

(9) $\int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) dx$;

(10) $\int \frac{1}{\cos^7 x} dx$;　　(11) $\int \cos^6 dx$.

9．求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x}$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$;

(3) $\int \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt[3]{x + 1}} dx$;　　(4) $\int \frac{1}{\sqrt[n]{(x - a)^{n+1}(x - b)^{n-1}}} dx$ $(n \in N)$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$;　　(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$;

(7) $\int \sqrt{2 + x - x^2} dx$;　　(8) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

第九章　定积分

定积分是积分学的重要部分之一。本章将在具体实例的基础上引出定积分的概念，进而研究函数的可积性，以及介绍定积分的性质和计算方法等。

§ 9.1　定积分概念

一　两个实例

1　曲边梯形的面积

所谓曲边梯形是指由非负连续函数所确定的曲线 $y=f(x)$ 与三条直线（$x=a$，$x=b$，$y=0$）所围成的平面图形（如图9.1）。

我们的任务是如何求这个曲边梯形的面积。在初等几何中，只给出了计算多边形及圆形面积的方法，而对曲边梯形的面积，初等几何是无法解决的，这就需要运用数学分析的方法（极限方法）加以解决。回顾第二章的“割圆术”对我们的启发。将曲边梯形进行如下的分割：用平行于 y 轴的直线将曲边梯形任意地分割成 n 个小的曲边梯形；对每一个小的曲边梯形的曲边用平行于 x 轴的直线代替，使之成为矩形。当“割之弥细”时，用 n 个小矩形面积之和近似代替曲边梯形的

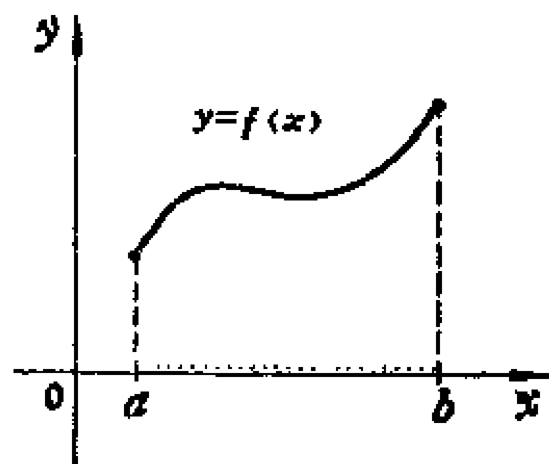


图9.1

面积，"所失弥小"．这就是讨论曲边梯形面积问题的基本想法。其具体作法如下：

首先，把区间 $[a, b]$ 用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 分成 n 个小区间：$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots[x_{n-1}, x_n]$，并用 Δx_1，Δx_2，$\cdots$，Δx_n 分别表示各小区间的长度．这些分点 x_i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 的全体给出了区间 $[a, b]$ 的一个分割，记作 T．过分割 T 的每个分点 x_i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 做 y 轴的平行线，把区间 $[a, b]$ 上的曲边梯形分成 n 个小曲边梯形（如图 9.2）．

其次，由于每个小曲边梯形仍有一条曲边，因此用直线段代替曲线段．当分法无限变细时，使其每个 Δx_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 无限变小，则可用平行于 ox 轴的直线段代替小曲边梯形的曲边。这时小曲边梯形的面积用小矩形的面积近似代替．比如，在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的第 i 个小曲边梯形的面积可以用 Δx_i 为底，以 $f(\xi_i)$ $(\xi_i\in[x_{i-1}, x_i])$ 为高的小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替（如图 9.2）．且把每个小曲边梯形都用同样方法来处理。

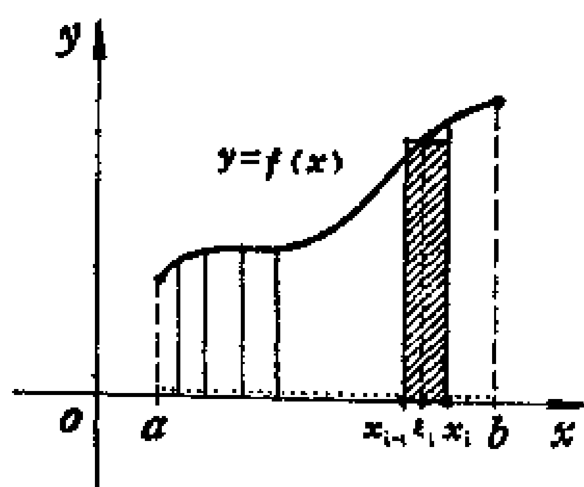


图9.2

再次，把 n 个小矩形的面积累加起来，其和数 S_n 可表为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

它就是欲求"曲边梯形面积 S"的一个近似值，即

$$S\doteq S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

最后，当分点增多时，且使每个小区间的长度 Δx_i $(i=$

$1, 2, \cdots, n$）越来越小时，则和数 S_n 就越来越接近欲求的"曲边梯形的面积 S"。不难想到，当分点无限增多时，且使每个小区间的长度 Δx_i（$i=1, 2, \cdots, n$）无限趋近于 0 时，即分割 T 的最大的小区间长度 $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$ 无限地趋近于零，如果上述和数 S_n 存在极限，则这个极限自然应该定义为所求曲边梯形的面积 S。即

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0} S_n=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9.1}$$

到此为止，我们不仅给出了曲边梯形面积的定义，并且也提供了计算曲边梯形面积的方法。于是，求曲边梯形的面积问题，要通过计算（9.1）式的极限来完成。然而，（9.1）式的极限与数列极限不同。首先，我们看到，和数 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是依赖于分割 T 的，即不同的分割（分点的个数及分点在区间 $[a, b]$ 上所处的位置）对应不同的和数；其次，即使将分割固定，由于点 ξ_i 的选取不同，小矩形的高 $f(\xi_i)$ 就不同，因此和数 S_n 也不同。于是，和数 S_n 不但与分割 T 有关，而且还与点 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ 的选取有关。所谓和数 S_n 存在极限，就是对任意的分割 T 和任意选取的点 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，当 $\lambda(T)\to 0$ 时都存在同一极限（有时亦称和数 S_n 存在极限与分割 T 和 ξ_i 的选取无关）。可见，S_n 的极限比我们以前讨论的数列极限和函数极限在分析结构上要复杂得多。

2　变力所作的功

在中学物理中指出：如果物体在常力（即力的大小和方向都不变）f 的作用下，沿着力 f 的方向所移动的距离为 S，则常力 f 所作的功 $W=fS$。现在研究物体在变力（即力的大小和方向都在不断地变化）作用下所作的功应当如何计算。

为了简单起见，设变力只有大小变化而方向不变，且取变力的正方向作为 ox 轴的正方向，物体沿 ox 轴从 a 运动到 b（$a<$

b)．又设在区间〔a, b〕上的变力是 $f(x)$． 现在的问题是求变力 $f(x)$ 在〔a, b〕上所作的功．

虽然在常力作用下求功的公式$W=fS$已不能使用，但是在〔a, b〕上任意一个很小的区间上，变力可视为常力，于是在这一小区间上公式 $W=fS$ 就可以应用了．如同求曲边梯形的面积一样，用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 把〔a, b〕任意地分成 n个小区间，这个分割记为T，并在每一个小区间〔x_{i-1}, x_i〕上任取一点 ξ_i，由于〔x_{i-1}, x_i〕很小，在〔x_{i-1}, x_i〕上的变力 $f(x)$可用在点 $\xi_i\in$〔x_{i-1}, x_i〕的常力 $f(\xi_i)$ 近似代替（如图9.3），从而，$f(\xi_i)\Delta x_i$ 便是变力 $f(x)$在〔x_{i-1}, x_i〕上所作功的一个近似值．于是，和数



图9.3

$$W_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

就是变力 $f(x)$ 在〔a, b〕上所作功W的一个近似值．当分点增多时，且使每个小区间的长度缩小，这种近似程度就越好．当$\lambda(T)\to 0$ 时，如果上述和数存在极限，则这个极限就是变力$f(x)$在〔a, b〕上所作的功，即

$$W=\lim_{\lambda(T)\to 0}W_n=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

和求曲边梯形的面积问题一样，这个极限应该与分割T 和点 ξ_i 的选取无关．

上述二例，一个是几何问题，一个是物理问题．虽然它们各属不同学科，但是从数量上看，解决问题的基本思想和所采用的方法都是相同的．其基本思想是：把整体问题通过分割化

为局部问题，在局部上通过"以直代曲"或"以常代变"求得局部近似量，借助于极限进而又求得整体量．其具体方法是：①用分割T将区间〔a，b〕分成小区间：Δx_i（$i=1$，2，…，n）；②在每个小区间Δx_i（$i=1$，2，…，n）上作近似代替；③作和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；④当$\lambda(T)\to 0$时，对和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$取极限．今后简述为"分割——代替——作和——取极限"．

在此基础上我们不难给出定积分的概念．

二 定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在区间〔a，b〕上有定义．用分割T

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$$

将区间〔a，b〕分成n个小区间〔x_{i-1}，x_i〕，其长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1$，2，…，n），并用$\lambda(T)$表示对应分割T的各小区间长度Δx_i（$i=1$，2，…，n）中的最大者，即$\lambda(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$．在每个小区间〔$x_{i-1}$，$x_i$〕上任取一点$\xi_i$，作和数

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为函数$f(x)$的积分和．如果对任意的分割T和任意选取的点$\xi_i\in$〔x_{i-1}，x_i〕，当$\lambda(T)\to 0$时，积分和存在极限，设极限是I，即

$$I=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则称函数$f(x)$在区间〔a，b〕上可积，将其极限I称为函数$f(x)$在区间〔a，b〕上的定积分，记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$I=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.2)$$

其中的 a 和 b 分别称为定积分的**下限**和**上限**，x 称为**积分变量**，函数 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)dx$ 称为**被积表达式**.

在历史上，上述定积分的定义首先由黎曼给出的，所以有时将和数 S_n 称为**黎曼和**；而将其可积称为**黎曼可积**；其定积分称为**黎曼积分**.

极限（9.2）可用 $\varepsilon—\delta$ 语言叙述如下：

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，且对任意的分割 T 和任意选取的点 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon.$$

根据定积分的定义，上述二例均可写成定积分的形式：

曲边梯形的面积 $S=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$；

变力所作的功 $W=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$.

关于定积分的概念，还有以下几点注意：

1．从定积分的定义直接可以看出，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是个数，且该数的大小仅与被积函数 $f(x)$ 及积分限 a、b 有关，而与积分变量符号的选取无关，因此有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots.$$

2．在定积分的定义中，我们假定了 $a<b$，为了今后运算方便，我们规定：当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$，即调换积分限时，积分值差一个符号．当 $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)dx=0$.

3．如果 $f(x)\geqslant 0$，且在 $[a, b]$ 上连续，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义是：由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 以及 ox 轴所围成的曲边梯形的面积.

§ 9.2 函数的可积条件

一 可积的必要条件

定理 9.1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.

证明 用反证法. 假设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界，则对 $[a, b]$ 上的任一个分割 T，$f(x)$ 只少在某一个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上无界，于是，只要适当地选取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$（其它点 ξ_i $(i \neq k)$ 保持不变）可使 $f(\xi_k)\Delta x_k$ 任意大. 从而积分和 S_n 的绝对值也是任意大，故 S_n 不存在极限，这就推得函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积. 与已知条件矛盾. □

定理9.1 表明：函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界仅仅是可积的必要条件，这就是说，函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上有界，却不一定可积. 例如，狄利克莱函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在$[0, 1]$上虽然有界，但不可积. 事实上，对任一分割 T，对其任一小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中既含有理点又含无理点，当 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都取有理点时，由于 $D(\xi_i) = 1$，就使积分和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 \cdot (1 - 0) = 1;$$

当 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都取无理点时，由于 $D(\xi_i) = 0$，就使积分和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = 0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \cdot (1 - 0) = 0.$$

于是积分和的极限不存在.

那么什么样的有界函数在区间 $[a, b]$ 上是可积的呢？从定积分的定义使我们看到，函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的可积性，取决于积分和$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 极限（当 $\lambda(T)\to 0$ 时）的存在性。但是，由于积分和的构造是复杂的，直接判别它的极限存在性是困难的，因此，将先讨论大和与小和。

二 大和与小和

我们曾经指出过，积分和$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 既依赖于对区间 $[a, b]$ 的分割T，又依赖于在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 的选取。就是在分割 T 确定之后，由于点 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$的取法不同，有可能引起积分和 S_n 的变化。

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。对 $[a, b]$ 的分割 T，函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上存在上确界与下确界，分别记为 M_i 与 m_i，作和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i.$$

$S(T)$ 与 $s(T)$ 分别称为函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上关于分法T的**达布① 上和与达布下和，简称为大和与小和。**

由于在积分和中用 M_i 和 m_i 取代了 $f(\xi_i)$，因此大和与小和仅仅依赖于区间 $[a, b]$ 的分割 T。于是，在结构形式上大和与小和较积分和简化了，为研究函数的可积性提供了方便条件。

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，对$[a, b]$的任意分割T，总有

$$m_i\leqslant f(x)\leqslant M_i,\quad x\in[x_{i-1}, x_i].$$

---

① 达布：Darboux, J.G. 法国数学家，1842—1917。

因此关于分割T的积分和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，总是介于大和 $S(T)$与小和 $s(T)$ 之间，即

$$s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T). \qquad (1)$$

为了给出函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积准则，下面将讨论大和与小和的性质.

性质 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，并给定在 $[a, b]$ 上的一个分割T，则大和 $S(T)$ 是对应分割T的全部积分和的上确界，而小和 $s(T)$ 是对应分割 T 的全部积分和的下确界.

证明 这里只证大和的情形，对小和的情形同理可证.

设 M_i 是函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界. 根据上确界的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上必存在一点 η_i，使

$$f(\eta_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a},$$

又不难得到

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i>\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=S(T)-\varepsilon;$$

另外，对任意的积分和，都有（1）式成立，从而有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\leqslant S(T).$$

于是，上述二不等式表明 $S(T)$ 是积分和的上确界. □

性质 2 如果在分割T的基础上又添加新的分点以构成新的分割T'，则大和不增大而小和不减小，即

$$s(T)\leqslant s(T')\leqslant S(T')\leqslant S(T).$$

证明 只证明大和的情形，小和的情形同理可证.

不妨假定分割 T' 是由分割 T 添加一个分点 x' 而成. 如

果新分点多于一个，则可在分割T的基础上逐次添加一个分点来实现。

设新分点x'落在$[x_{i-1}, x_i]$之内，即$x_{i-1}<x'<x_i$，这样$S(T')$与$S(T)$只在区间$[x_{i-1}, x_i]$上有差别。由于M_i是函数$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的上确界，因此，$S(T)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的项是

$$M_i(x_i - x_{i-1}).$$

设M_i'与M_i''分别为$f(x)$在区间$[x_{i-1}, x']$与$[x', x_i]$上的上确界，则$S(T')$在$[x_{i-1}, x']$与$[x', x_i]$上的项分别为

$$M_i'(x' - x_{i-1}), \quad M_i''(x_i - x').$$

因为区间$[x_{i-1}, x']$和$[x', x_i]$是区间$[x_{i-1}, x_i]$的一部分，所以有

$$M_i' \leqslant M_i, \quad M_i'' \leqslant M_i,$$

从而得到

$$M_i'(x' - x_{i-1}) \leqslant M_i(x' - x_{i-1}),$$
$$M_i''(x_i - x') \leqslant M_i(x_i - x'),$$

于是

$$M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') \leqslant M_i(x' - x_{i-1}) + M_i(x_i - x') = M_i(x_i - x_{i-1}).$$

由此得到

$$S(T') \leqslant S(T). \qquad \square$$

性质 3 任何一个分割T的小和$s(T)$都不超过任何一个分割T'的大和$S(T')$，即$s(T) \leqslant S(T')$。

证明 设T为$[a, b]$上的任意一个分割，对应的小和与大和分别为$s(T)$与$S(T)$。又设T'为$[a, b]$的另一个任意分割，所对应的小和与大和分别为$s(T')$与$S(T')$。

将分割T与T'的分点合并在一起。这样就得到第三个分割T''，与之对应的小和与大和分别为$s(T'')$与$S(T'')$。因为第三个分割T''是在第一个分割T的基础上添加新分点后（实

际上将第二个分割 T' 的分点都添加进去）而得到的，根据性质2，因此有

$$s(T)\leqslant s(T'');$$

同理（以T' 为基础添加新分点）又有

$$S(T'')\leqslant S(T');$$

以及

$$s(T'')\leqslant S(T''),$$

于是，得

$$s(T)\leqslant s(T'')\leqslant S(T'')\leqslant S(T').$$

故得

$$s(T)\leqslant S(T'). \qquad \square$$

性质 4 小和的上确界不超过大和的下确界。

证明 设对应任意分割的小和集合记为 $\{s(T)\}$。根据性质 3，它是有上界的。再根据确界存在定理知，集合 $\{s(T)\}$ 存在上确界，并记为

$$I^\circ=\sup\{s(T)\}.$$

但是，根据上确界的定义，任何一个大和 $S(T)$ 有

$$I^\circ\leqslant S(T). \qquad (2)$$

同理，大和的集合 $\{S(T)\}$ 有下界，且存在下确界，并可记为

$$I_\circ=\inf\{S(T)\}. \qquad (3)$$

由不等式（2）和（3）可得

$$I^\circ\leqslant I_\circ. \qquad \square$$

性质 4 表明：对任何分割的大和与小和都有

$$s(T)\leqslant I^\circ\leqslant I_\circ\leqslant S(T). \qquad (4)$$

三　可积准则

在大和与小和概念及其性质的基础上，就不难证明下列可积准则。

定理 9.2（可积准则） 有界函数 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积

的充要条件是

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0 \tag{5}$$

证明 **必要性** 已知定积分

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

存在，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的分割 T 和任意选取的点 ξ_i，当 $\lambda(T)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$$

即 $$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+\varepsilon.$$

根据性质1知，小和 $s(T)$ 与大和 $S(T)$ 分别是积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的下确界与上确界，再根据确界的定义，有

$$I-\varepsilon\leqslant s(T)\leqslant S(T)\leqslant I+\varepsilon,$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$|S(T)-s(T)|<(I+\varepsilon)-(I-\varepsilon)=2\varepsilon,$$

即（5）式成立。

充分性 假设（5）式成立，证明函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积．由公式（4），对于任意的分割 T 都有

$$s(T)\leqslant I^{\circ}\leqslant I_{\circ}\leqslant S(T).$$

由（5）式知，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，有 $(S(T)-s(T))\to 0$，因此有 $I^{\circ}=I_{\circ}$，并用 I 表示它们的公共值．从而，对分割 T 有

$$s(T)\leqslant I\leqslant S(T). \tag{6}$$

又已知，对任意分割 T 有

$$s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T). \tag{7}$$

由不等式（6）和（7），可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \leqslant S(T) - s(T),$$

再利用（5）式，于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \leqslant S(T) - s(T) < \varepsilon,$$

即 I 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分。 □

为了使用方便，现将可积准则的条件改变如下：

令 $\omega_i = M_i - m_i$，称 ω_i 为函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**。亦即

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} \{|f(x'') - f(x')|\}.$$

于是有

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

故上述定理9.2可改写成：有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0. \tag{9.3}$$

亦称**可积准则**。

通过（9.3），可积准则也可以用 ε—δ 形式叙述如下：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T) = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \{\Delta x_i\} < \delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

为了以后使用方便，现将可积准则与其否定叙述对比如下：

$f(x)$在$[a, b]$上可积	$f(x)$在$[a, b]$上不可积
对任意给定的$\varepsilon>0$	存在某个$\varepsilon_0>0$
存在$\delta>0$	对任意的$\delta>0$
当$\lambda(T)<\delta$时	存在某个分割T，当$\lambda(T)<\delta$时
有$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i<\varepsilon$	有$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i \geqslant \varepsilon_0$

四　可积函数类

有了可积准则，不难证明，以下三类函数在区间上是可积的。

定理 9.3　如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在$[a, b]$上可积。

分析　要想证明$f(x)$在$[a, b]$上可积，根据可积准则知，只须证明：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\lambda(T)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$时，有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

因为函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，则$f(x)$在区间$[a, b]$上就一致连续。于是当$\lambda(T)<\delta$时，可得$\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，进而可推得$\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$。

证明　已知$f(x)$在$[a, b]$上连续，根据康托定理知，$f(x)$在$[a, b]$上一致连续，即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在

$\delta>0$，对 $[a,\ b]$ 的任一分割T，当 $\lambda(T)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，对任意 x'，$x''\in[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

特别地，由于 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，因此，在每一个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上一定能取到最小值 $f(\xi_i')=m_i$，和最大值 $f(\xi_i'')=M_i$，其中 ξ_i'，$\xi_i''\in[x_{i-1},\ x_i]$，故必有

$$f(\xi_i'')-f(\xi_i')=\omega_i<\varepsilon\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

于是，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon\cdot(b-a),$$

根据可积准则知，$f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积． □

定理 9.4 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有界，且只有限个间断点，则 $f(x)$在 $[a,\ b]$上可积．

分析 根据可积准则，只须证明，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

为此将 $[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$分成两类：一类是与包含间断点的某些小区间没有交点的；另一类是与包含间断点的某些小区间有交点的．对第一类可应用定理9.3 方法证之；第二类可利用 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的有界性来实现．

证明 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的有限个间断点为 α_1，α_2，$\cdots$，α_l；对任意给定的 $\varepsilon>0$，并使小区间 d_i：$(\alpha_i-\varepsilon,\ \alpha_i+\varepsilon)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 彼此不相交．于是，函数 $f(x)$在每一个区间 $[a,\ \alpha_1-\varepsilon]$，$[\alpha_1+\varepsilon,\ \alpha_2-\varepsilon]$，$\cdots$，$[\alpha_i+\varepsilon,\ \alpha_{i+1}-\varepsilon]$，$\cdots$，$[\alpha_l+\varepsilon,\ b]$ 上是连续的（图 9.4的影线部分），从而是一致连续的，即在每一个这样的小区间上，对于上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta<0$，使得属于该区间其长度小于 δ 的任意的小区间上，函数 $f(x)$ 的振幅都小于 ε．当然，对于不同的小区间

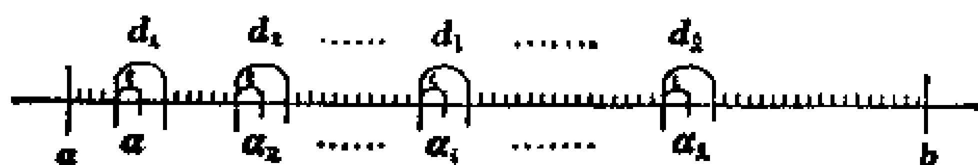


图9.4

这样的 δ 不一定相等，但是，由于使 $f(x)$ 连续的上述区间是 $l+1$ 个，因此，在这些有限个 δ 中必能取到最小的， 我们不妨仍记为 δ。总之，在这些区间内，使其长度小于 δ 的任意个小区间，函数 $f(x)$ 在其上的振幅都小于 ε。

现在假设 T 是 $[a, b]$ 上的任意一个分割，使 $\lambda(T)<\delta$（即上面取到的最小者），对分割 T 把 $[a, b]$ 分成的小区间集合 $\{[x_{i-1}, x_i]\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 可分为两类：

第一类是 $[x_{i-1}, x_i]$ 包含在区间 $[a, a_1-\varepsilon]$，$[a_1+\varepsilon, a_2-\varepsilon]$，$\cdots$，$[a_i+\varepsilon, a_{i+1}-\varepsilon]$，$\cdots$，$[a_l+\varepsilon, b]$ 之内；

第二类是 $[x_{i-1}, x_i]$ 与某一个区间 $d_i(i=1, 2, \cdots, l)$ 有公共点。

这样，我们把和数 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 分成两部分

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\Sigma'+\Sigma'',$$

其中 Σ' 是对应第一类的小区间所作的和， 而 Σ'' 是对应第二类的小区间所作的和。

对于和数 Σ'，由于 $\lambda(T)<\delta$，因此，任何一个第一类的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 都有 $\omega_i<\varepsilon$。从而得

$$\Sigma'\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\cdot\Sigma'\Delta x_i\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon\cdot(b-a)。\quad(8)$$

现在估计第二类的和数 Σ''。我们不难看到，与某个 d_i 有公共点的所有第二类小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 之长的和小于 $2\varepsilon+2\delta$（如图9.5），且第二类小区间的长度总和不超过

$$l\cdot(2\varepsilon+2\delta)=2l(\varepsilon+\delta).$$

显然，我们可以取 $\delta<\varepsilon$，这样总和不超过 $4l\varepsilon$。又因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有界，所以 $f(x)$ 在任何一个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上的振幅不超过它在 $[a,\ b]$ 上的振幅 ω。从而得

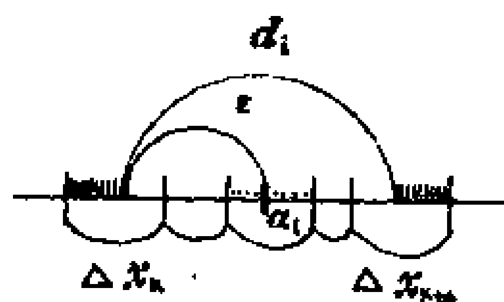


图9.5

$$\Sigma''\omega_i\Delta x_i\leqslant\omega\Sigma''\Delta x_i\leqslant 4\omega l\cdot\varepsilon. \tag{9}$$

综合（8）与（9），我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon[(b-a)+4\omega l],$$

只要分割T满足 $\lambda(T)<\delta<\varepsilon$ 即可。于是，根据可积准则，函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积。 □

定理 9.5 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调有界的，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积。

证明 不妨假定 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是递增的。于是，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的振幅 $\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})\geqslant 0$，以及函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的振幅为 $f(b)-f(a)>0$。①

对任意给定的 $\varepsilon>0$，对 $[a,\ b]$ 作分割 T，使

$$\lambda(T)=\max_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}=\delta,$$

以及 $f(x)$ 是递增的，故有 $\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=f(b)-f(a)$，

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant\lambda(T)\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

---

① 总可设 $f(b)-f(a)>0$，否则，若 $f(b)-f(a)<0$，则与假定 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是递增的相矛盾；若 $f(b)=f(a)$，则函数 $f(x)$ 为常量，自然是可积的。

$$=\lambda(T)[f(b)-f(a)]<\varepsilon,$$

根据可积准则知，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。 □

§ 9.3 定积分的性质

上一节我们集中讨论了函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的充要条件——可积准则，以及给出某些函数的可积性，这一节将研究可积函数的具有的性质，它们对于判别函数的可积性及定积分的计算常常是有用的。

定理 9.6 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 k 为实数，则 $kf(x)$在 $[a, b]$上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

证明 已知 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，根据定积分的定义知，

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx,$$

于是

$$k\left(\int_a^b f(x)dx\right)=k\left(\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b kf(x)dx.$$

这不仅证明了 $kf(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积（因为 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$存在），并且也建立了上面的等式。 □

定理9.7 如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$上可积，$f(x)\pm g(x)$ 在 $[a, b]$上也可积，且有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

证明 已知 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，根据定积分的定义知：

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b g(x)dx,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\\&\quad\pm\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\pm\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\right]\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx.\end{aligned}$$ □

定理 9.8 如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

证明 已知 $f(x)$，$g(x)$在 $[a, b]$上可积，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$上有界，并设

$$|f(x)|\leqslant L,\ |g(x)|\leqslant M\quad x\in[a, b],$$

对任意的分割T，我们考察在区间 $[x_{i-1}, x_i]$上的任取两点 x'，x''，有

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')$$

$$=f(x'')g(x'')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x')g(x')$$

$$=[f(x'')-f(x')]g(x'')$$

$$+[g(x'')-g(x')]f(x').$$

且用 ω_i' ω_i''分别表示函数 $f(x)$，$g(x)$在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，则有

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant\omega_i'M+\omega_i''L.$$

此式表明乘积函数 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅 ω_i 不超过$\omega_i'M+\omega_i''L$，即

$$\omega_i\leqslant\omega_i'M+\omega_i''L,$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i+L\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i.$$

因为函数 $f(x)$，$g(x)$在 $[a, b]$ 上可积，所以当 $\lambda(T)\to 0$时，有$M\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i\to 0$ 和 $L\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i\to 0$，于是，当$\lambda(T)\to 0$ 时，也有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to 0,$$

根据可积准则知，$f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a, b]$上可积。 □

定理 9.9 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则在其部分区间$[a', b']\subset[a, b]$上也可积。

证明 因为 $f(x)$在 $[a, b]$上可积，所以可用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述如下：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\sum_{a}^{b}(T)^{①}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon. \tag{1}$$

---

① $\sum_{a}^{b}(T)$表示在区间$[a, b]$上分割 T所作的和数$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$。

设 T' 是区间〔a', b'〕上的任意一个分割，且满足$\lambda(T')<\delta$; 又设 T'' 是区间〔a, a'〕和〔b', b〕上的分割，且满足$\lambda(T'')<\delta$. 把这两个分割合起来，就得〔a, b〕上的一个新的分割，记为T°，显然有 $\lambda(T^{\circ})<\delta$，由不等式（1），以及和数的每一项都是正的，则有

$$\sum_{a'}^{b'}(T^{\circ})\leqslant\sum_{a}^{b}(T^{\circ})<\varepsilon,$$

于是，根据可积准则知，$f(x)$在〔a', b'〕上可积。 □

定理9.10 如果函数 $f(x)$ 在〔a, c〕与〔c, b〕上可积，且 $c\in$〔a, b〕，则 $f(x)$ 在〔a, b〕上也可积，且有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{9.4}$$

证明 首先证明 $f(x)$在〔a, b〕上可积.

我们对〔a, b〕给任意一个分割T，且把 c 当作一个新分点添加到分割T中，则得一个新分割T'.

当点c不是分割T的分点时，和数$\sum_a^b(T)$与和数$\sum_a^b(T')$有可能不相等，即$\sum_a^b(T)$中含点c的那一项分成了$\sum_a^b(T')$中的两项，其余各项完全相同. 因此，当 $\lambda\to0$（λ是 $\lambda(T)$ 与 $\lambda(T')$中任意一个，因为 $\lambda(T)\to0\Longleftrightarrow\lambda(T')\to0$），可推得

$$\sum_a^b(T)-\sum_a^b(T')\longrightarrow0. \tag{2}$$

另外，由于对区间〔a, b〕的分割 T' 所作的和数$\sum_a^b(T')$可以分成对应于区间〔a, c〕与〔c, b〕的两个和数. 因为 $f(x)$在〔a, c〕与〔c, b〕上可积，所以当 $\lambda(T')\to0$时，这两个和数$\left(\sum_a^c(T')与\sum_c^b(T')\right)$都趋向于0. 因而当 $\lambda(T')\to0$ 时，就有

$\sum_a^b(T')\to 0$。于是，由公式（2）知，当 $\lambda(T)\to 0$ 时（实际上 $\lambda(T')$ 也趋向于0），可推知

$$\sum_a^b(T)\to 0,$$

故函数 $f(x)$在〔a, b〕上可积。

其次证明（9.4）成立。

因为函数 $f(x)$在〔a, b〕上可积，所以对〔a, b〕的任意分割T'，它们的积分和都存在极限。现将分割 T' 按〔a, c〕和〔c, b〕分成两个分割，即 T_1 是在〔a, c〕上的分割，T_2 是在〔c, b〕上的分割，两者合起来就是 T' 在〔a, b〕上的分割，则虽然有

$$\sum_a^b(T')=\sum_a^c(T_1)+\sum_c^b(T_2),$$

当 $\lambda(T')\to 0$ 时，必有 $\lambda(T_1)\to 0$ 和 $\lambda(T_2)\to 0$，于是有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_a^b(T')=\lim_{\lambda(T_1)\to 0}\sum_a^c(T_1)+\lim_{\lambda(T_2)\to 0}\sum_c^b(T_2),$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)dx$$ □

定理9.10也叫积分区间的可加性。

定理9.11 如果函数 $f(x)$在〔a, b〕上可积，且$f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$

证明 因为 $f(x)\geqslant 0$，所以对〔a, b〕的任一分割T的积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0,$$

根据极限的不等式性质，有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\geqslant 0. \quad \square$$

推论 1 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

推论 2 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都可积，且有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)dx \tag{9.5}$$

推论 3 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a). \tag{9.6}$$

特别地，当 $f(x)\equiv c$（c 是常数）时，有

$$\int_a^b f(x)dx=c\cdot(b-a). \tag{9.7}$$

当 $c=1$ 时，有

$$\int_a^b 1dx=b-a. \tag{9.8}$$

定理9.12 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积，且有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx. \tag{9.9}$$

证明 首先证明 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积。

我们分别把函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅记作 ω_i 与 ω_i'。因为函数 $f(x)$ 对于在 $[a, b]$ 上任意两点 x'，x'' 都有

$$\big||f(x'')|-|f(x')|\big|\leqslant|f(x'')-f(x')|,$$

所以函数 $|f(x)|$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅 ω_i' 不超过函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅 ω_i，即

$$\omega_i' \leqslant \omega_i.$$

从而得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

由于 $f(x)$在 $[a, b]$ 上可积，当 $\lambda(T) \to 0$ 时，有$\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0$，因此可推得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta x_i \to 0$，于是，函数 $|f(x)|$在 $[a, b]$ 上可积。

其次证明 (9.9) 式成立。

对任意的 $x \in [a, b]$，显然有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由 (9.5) 式可知

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

即
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad \square$$

定理9.13（积分中值定理） 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则存在常数 μ，$m \leqslant \mu \leqslant M$，使

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{9.10}$$

特别地，当 $f(x)$在 $[a, b]$上连续时，有

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \tag{9.11}$$

其中 $c \in [a, b]$。

证明 不妨设 $a<b$，由 (9.6) 式，得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),$$

或
$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

取 $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，显然，$m\leqslant\mu\leqslant M$，故

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a).$$

特别地，当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值. 根据连续函数的介值性定理知，在 $[a, b]$ 内必存在一点 c，使 $f(c)=\mu$，于是有

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a). \qquad \square$$

通常称公式（9.11）为积分中值公式，它具有明显的几何意义. 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$，ox 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积，面公式（9.11）表明这个曲边梯形的面积恰好等于以区间 $[a, b]$ 的长为底以 $f(c)$ 为高的矩形的面积（图9.6）。

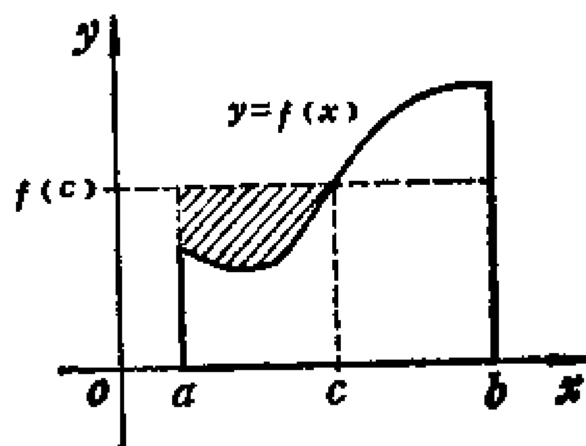


图9.6

定理9.14（第一中值定理） 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $g(x)$ 不变号，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则存在常数 μ，$m\leqslant\mu\leqslant M$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx. \qquad (9.12)$$

特别地，当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx, \qquad (9.13)$$

其中 $c\in[a, b]$.

显然，当 $g(x)=1$ 时，定理 9.14 就是定理 9.13，因此说，第一中值定理是积分中值定理的推广.

本定理的证明见本章的例题选讲例12.

§ 9.4 微积分基本公式

一 用定义计算定积分

我们知道，定积分是一种构造性的定义，它不仅定义了定积分，并且又给出了定积分的计算方法。现在举例如下：

例 1 用定义计算定积分

$$I_1=\int_0^1 x^2dx.$$

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的，所以，根据定理9.3知，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0, 1]$ 上是可积的。故积分和的极限不依赖 $[0,1]$ 的分割 T，以及点 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ 的选取。为了计算简单，我们采用特殊的等分法为分割 T，且选取小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的左端点 x_{i-1} 为 ξ_i。由于对区间 $[0, 1]$ n 等分，故有 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{1}{n}$；对应分点（如图9.7）：

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{2}{n},\quad \cdots,\quad x_{n-1}=\frac{n-1}{n},$$

$$x_n=1$$

的函数 $f(x)$ 的值为

$$f(0)=0^2=0,$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2},$$

$$f\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)^2=\frac{2^2}{n^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

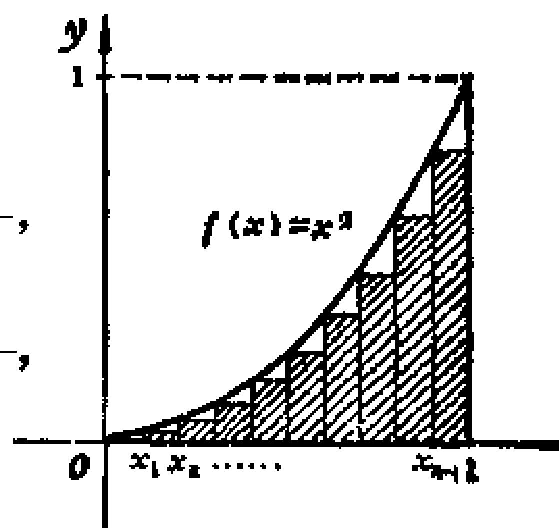


图9.7

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

再作积分和，有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}①$$

$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

因为 $\lambda(T)=\frac{1}{n}$，所以当 $n\to\infty$时，$\lambda(T)\to 0$，于是，得

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3},$$

故

$$I_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

例 2 用定义计算积分

$$I_2=\int_0^1 e^x dx.$$

解 因为函数 $f(x)=e^x$ 在〔0, 1〕上连续，所以函数 $f(x)=e^x$在〔0, 1〕上可积，故对〔0, 1〕采用等分法，且取 $x_i=\xi_i$。如

---

① 利用自然数平方和公式：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

图9.8示，将区间 $[0,1]n$ 等分，则有

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad \xi_i=x_i=\frac{i}{n}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

对应各分点 x_i 的函数值为：

$$e^{\frac{1}{n}},\quad e^{\frac{2}{n}},\quad \cdots,\quad e^{\frac{n}{n}},$$

其积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}.$$

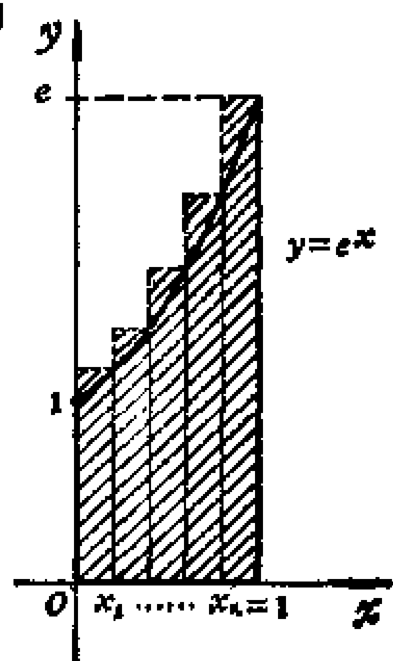


图9.8

于是，取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$$

$$=(e-1)\frac{\lim\limits_{h\to0}e^h}{\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}}\left(令\ h=\frac{1}{n}\right)$$

$$=e-1.$$

故 $$I_2=\int_0^1 e^x dx=e-1.$$

从上述二例可以看出，当被积函数 $f(x)$ 是可积时（即定积分的存在与分法 T 和点 ξ_i 的选取无关），可用特殊的分割（如等分法）和选取特殊的点 ξ_i（如小区间的左、右端点等）构造积分和，再求积分和的极限。我们不难看到，用定积分定义计算定积分，就是象例 1 与例 2 这样简单函数的定积分都如此的麻烦。可想而知，计算复杂函数的定积分，计算积分和的极限将是相当困难的。这就要求我们去寻求计算定积分的简便方法。本节将要介绍的微积分基本公式正是为此而给出的，下面先讨论积分上限函数。

二　积分上限函数及其性质

定义　如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，对 $[a, b]$ 上任一点 x，$f(x)$ 在 $[a, x]$ 上也可积，于是，变动上限的积分 $\int_a^x f(x)dx$ 给出了一个定义在 $[a, b]$ 上的函数，记作

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad x\in[a, b],$$

称 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的**积分上限函数.**

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，则积分上限函数 $F(x)$ 的几何意义，就是在区间 $[a, x]$ 上曲线 $y=f(x)$ 下面的曲边梯形的面积，有时也称 $F(x)$ 为面积函数（图9.9）.

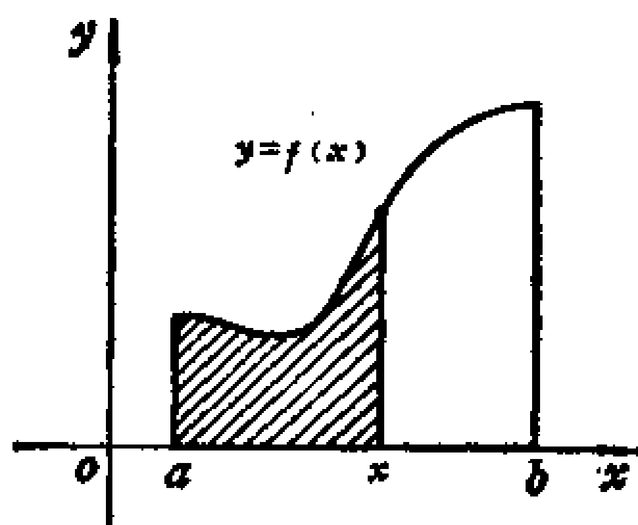


图9.9

积分上限函数具有如下重要性质：

定理9.15　如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证明　任取一点 $x\in[a, b]$，并给 x 以改变量 Δx，且使 $x+\Delta x\in[a, b]$. 根据积分上限函数的定义及积分区间可加性定理，得

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt \\
&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.
\end{aligned}
$$

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，根据定理9.1知，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界，即

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b].$$

再应用积分中值定理，则必存在一常数 μ 使得

$$
\begin{aligned}
F(x+\Delta x) - F(x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\
&= \mu(x+\Delta x - x) = \mu\Delta x,
\end{aligned}
$$

其中 $m \leqslant \mu \leqslant M$。

当 $\Delta x \to 0$ 时，得

$$\lim_{\Delta x \to 0}[F(x+\Delta x) - F(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \mu \cdot \Delta x = 0,$$

即函数 $F(x)$ 在点 x 连续。由点 x 的任意性，于是 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。 □

定理9.16 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且有

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{9.14}$$

证明 任取一点 $x \in [a, b]$，并给点 x 以改变量 Δx，且使 $x + \Delta x \in [a, b]$。根据 $f(x)$ 的连续性及积分中值定理，故得

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Delta x} f(c) \cdot \Delta x = f(c),
\end{aligned}
$$

其中的 c 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间。

当 $\Delta x\to0$ 时，必有 $c\to x$，以及 $f(x)$在点 x 的连续性，故有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{c\to x}f(c)=f(x),$$

亦即函数 $F(x)$在点x可导，且 $F'(x)=f(x)$。又由 x 的任意性，于是 $F(x)$在 $[a,\ b]$上可导，且有

$$F'(x)=f(x),\quad x\in[a,\ b]. \qquad \square$$

定理9.16表明：求微分运算正是求（变动上限的）定积分运算的逆运算，即从公式（9.14）可得

$$dF(x)=d\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)dx$$

从而有

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt=\int_a^x dF(t).$$

另外，定理9.16又告诉我们，如果函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，则积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数。因而，在§8.1中所遗留的"连续函数一定存在原函数"的问题已得到证明。

三　微积分基本公式

定理9.17　如果函数 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续，且 $F(x)$ 是它的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (9.15)$$

证明　根据定理9.16知，积分上限函数

$$\int_a^x f(t)dt=F_1(x)$$

是函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的一个原函数。又由已知条件知，$F(x)$也是函数 $f(x)$在 $[a,\ b]$上的一个原函数。根据定理 8.1 知，$f(x)$ 的这两个原函数只相差一个常数C，即

$$F_1(x)-F(x)=C\quad x\in[a,\ b].$$

亦即

$$\int_a^x f(x)dx - F(x) = C. \qquad (1)$$

因为（1）式是个恒等式，如令 $x=a$，则得

$$\int_a^a f(t)dt = 0,$$

所以，得

$$C = -F(a).$$

将它代入等式（1），得

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

再令 $x=b$，故得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad \square$$

公式（9.15）称为**微积分基本公式，亦称牛顿—莱布尼兹公式。**

公式（9.15）表明：在计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$时，只要先求得函数 $f(x)$的一个原函数$F(x)$，对应上限与下限函数值的差 $F(b)-F(a)$ 就是所求定积分的值．正因为这样，求定积分的问题就转化为求原函数的问题，即不定积分的问题。

另外，公式（9.15）右边的原函数之差 $F(b)-F(a)$，通常也用符号 $F(x)\Big|_a^b$来表示，于是公式（9.15）又可写成

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (9.16)$$

利用公式（9.16）计算本节第一段的例1和例2是很简便的：因为函数 $f(x)=x^2$ 的原函数为$\frac{1}{3}x^3$；而函数 $f(x)=e^x$的原函数为 e^x，所以有

$$I_1 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3},$$

$$I_2=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1.$$

例 3 计算定积分

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

解 根据基本积分表，函数$\frac{1}{1+x^2}$的原函数为 $\operatorname{arctg}x$，应用微积分基本公式，得

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

例 4 计算定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \cos^2 x\,dx.$$

解 利用凑微分法，求得被积函数的原函数为$\frac{-1}{3}\cos^3 x$，应用微积分基本公式，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ \cos^2 x\,dx&=\frac{-1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-\frac{1}{3}(0-1)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

例 5 计算定积分

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0).$$

解 根据微积分基本公式，首先必须求其原函数. 象§8.3的例11那样，利用三角代换可求得函数$\sqrt{a^2-x^2}$的原函数为

$$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

然后应用微积分基本公式求其定积分

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{a^2}{2}\arcsin 1\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{a^2}{2}\cdot 0\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin 1=\frac{\pi a^2}{4}.$$

§ 9.5 定积分的计算

在上一节我们给出了微积分基本公式，原则上已经解决了定积分的计算问题．不过，在使用公式之前，必须象§9.4的例5那样，运用求不定积分的方法求其原函数，这样做其计算量较大，如果在进行变量换元时，将其上、下限也随之变化，可以大大地简化计算．

一 定积分的换元公式

定理9.18 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且代换 $x=\varphi(t)$ 满足如下条件：

（1） $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续；

（2） $\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$；

（3） 当 $t\in[\alpha, \beta]$ 时，有 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$．

则有
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{9.17}$$

证明 根据定理的条件，公式（9.17）两端的定积分都是存在的，现只须证明它们是相等的即可．

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则由复合函数的求导法则，$F[\varphi(t)]$ 也是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数．于是，由公式(9.15)，有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

及
$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$
$$=F(b)-F(a),$$

故等式（9.17）得证． □

例 1 计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$$

解 令 $x=a\sin t$，有 $dx=a\cos t dt$，当 x 从0变到 a 时，相应地 t 从0 变到$\frac{\pi}{2}$. 于是有

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

此例与§9.4的例5 的做法相比较，显然在计算上要简便得多。

例 2 计算定积分

$$\int_0^{\ln 2} e^x(1+e^x)^3 dx.$$

解 令 $e^x=t$，有 $e^x dx=dt$. 当x从0变到 ln2 时，而 t从1变到 2，于是有

$$\int_0^{\ln 2} e^x(1+e^x)^3 dx=\int_0^{\ln 2}(1+e^x)^3 e^x dx$$

$$=\int_1^2 (1+t)^3 dt=\frac{1}{4}(1+t)^4\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{4}(3^4-2^4)=\frac{65}{4}.$$

例 3 计算定积分

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解 考虑到 $\cos(\pi-x)=-\cos x$. 令 $x=\pi-t$，有 $dx=-dt$. 当 x从0变到 π时，而 t从 π变到0，于是有

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\ dt,$$

因为右端的第二个积分也等于 I，所以

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\ dt-I,$$

即

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\ d(-\cos t)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\text{arc tg}\cos t\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

二 分部积分公式

定理9.19 如果函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上都有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx. \qquad (9.18)$$

证明 根据定理所给出的条件，等式（9.18）两端的积分都存在，现在只须证明这个等式成立即可。

由于

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

因此有

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

亦即

$$[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx=\int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

故等式（9.18）成立。 □

例 4　计算定积分

$$\int_1^e x\ln x dx.$$

解　令 $u=\ln x$，$v'=x$；得 $u'=\frac{1}{x}$，　$v=\frac{x^2}{2}$.

由(9.18)式有

$$\int_1^e x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ \ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

例 5　计算定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx.$$

解　令 $u=x$，$v'=\cos x$；得 $u'=1$，$v=\sin x$.

由（9.18）式有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \sin x dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\cdot\sin 0\right)-(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1.$$

例 6　计算定积分

$$\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx.$$

解　令 $u=x$，$v'=e^{-x}$；得 $u'=1$，$v=-e^{-x}$.

由（9.18）式有

$$\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx$$

$$=-\ln 2e^{-\ln 2}-e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ \ln 2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}[-\ln 2+1]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

例 7　计算定积分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx \text{ 及 } I_n'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx \quad (n\geqslant 2).$$

解　求这两定积分被积函数的原函数在第八章的例题选讲的例11中已经给出，可以使用那里的递推公式，进而得到这两个定积分的递推公式。这里将根据定积分的特点，讨论如下：

首先，由于 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，因此有

$$I_n'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx,$$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，有 $dt=-dx$。当 x 从0变到$\frac{\pi}{2}$时，t 就从$\frac{\pi}{2}$变到0，则有

$$I_n'=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n t(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt.$$

于是，得到

$$I_n=I_n'.$$

其次，用分部积分法得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\ \sin x dx=(-\sin^{n-1}x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\ \cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

于是得到递推公式

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

最后，分两种情况进行讨论：

（1）当 $n=2m$（即 n为偶数）时，有：

$$I_n=I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\ I_{2m-2}$$

$$=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2n-2}\cdot I_{2m-4}=\cdots$$

$$=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

$$=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

$$=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

（2）当 $n=2m+1$（即 n为奇数）时，有：

$$I_n=I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1$$

$$=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

综上所述，故得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时，}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时。}\end{cases}$$

三　瓦里斯①公式

假设　$0<x<\frac{\pi}{2}$，有不等式

① 瓦里斯：Wallis，J．美国数学家，1616—1703。

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

对这个不等式取从0 到$\frac{\pi}{2}$的积分，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx,$$

根据例 7 的结果，则得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

用$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2}$除之，得

$$\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\cdot\frac{2}{2n+1}<\pi<\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\cdot\frac{1}{n},$$

令 $u_n=\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\cdot\frac{1}{n}$, 得

$$\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{u_n}<1,$$

亦即

$$\pi<u_n<\frac{2n+1}{2n}\pi.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\pi$，

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{n}=\pi.$$

这就是著名的瓦里斯公式。在历史上他首次把无理数 π表示成有理数列的极限形式。

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

由于本章的概念和理论都是重要的，因此特作如下要求：

定积分的概念是构造性的，比导数的定义复杂得多。因此，既要掌握“分割——代替——作和——取极限”的方法，又要深入地理解黎曼可积的特定含意，即积分和存在极限与分割T和点ξ_i的选取无关。在定积分存在的前提下，会用定积分的定义计算简单函数的定积分。

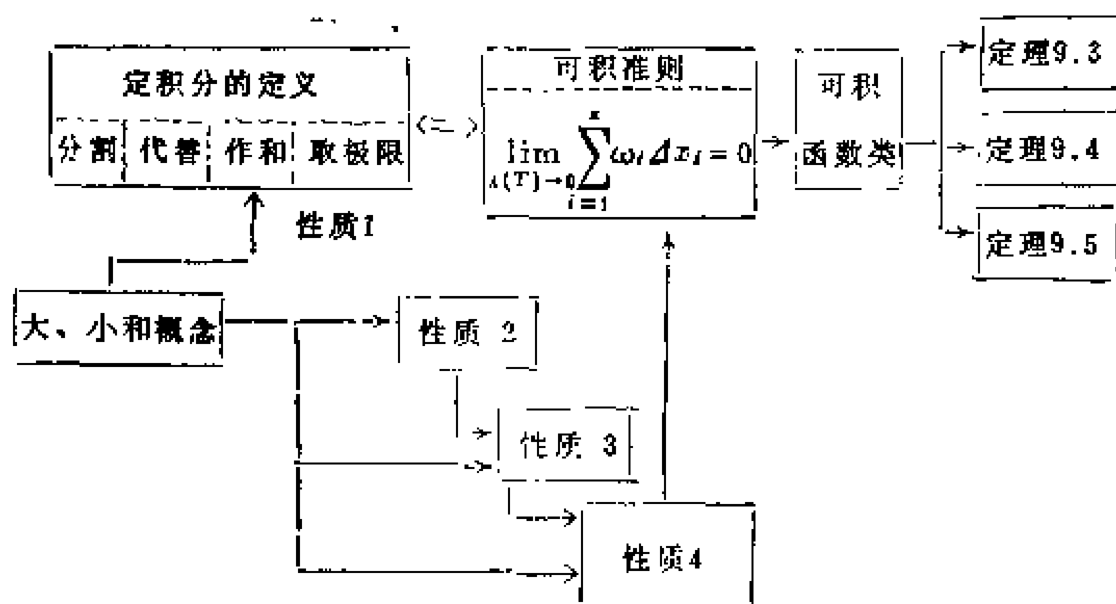
在§9.2中，我们重点的介绍了可积准则和可积函数类，这是理论性比较强的部分。要求掌握好可积准则及可积函数类的三个定理的证明方法。应当明确准则是充要的，三个定理的条件都是可积的充分条件，以及会用准则和三个定理判别某些函数的可积性。

因为定积分的性质在计算定积分和理论证明中有着重要的应用，所以要很好的掌握它。

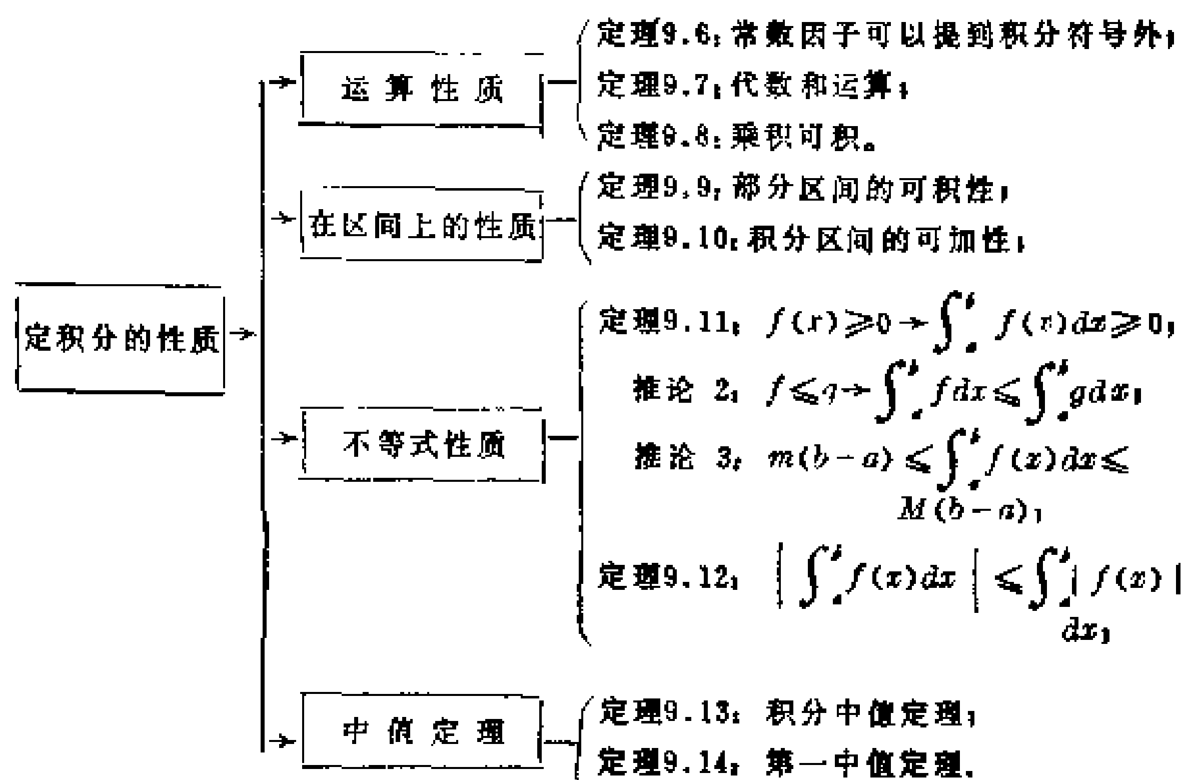
微积分基本公式主要是计算定积分的，但是公式本身又揭示了定积分与不定积分之间的关系。还应当明确，微积分基本公式与定理9.15和定理9.16是分不开的，特别是定理9.16指出了“连续函数一定存在原函数”。

有了微积分基本公式，和第八章所提供的求原函数的方法，从原则上讲，定积分的计算问题已经解决，可是对某些类型的定积分有其自己的简便易行方法，因此，应当较熟练地掌握定积分的换元法和分部积分法。

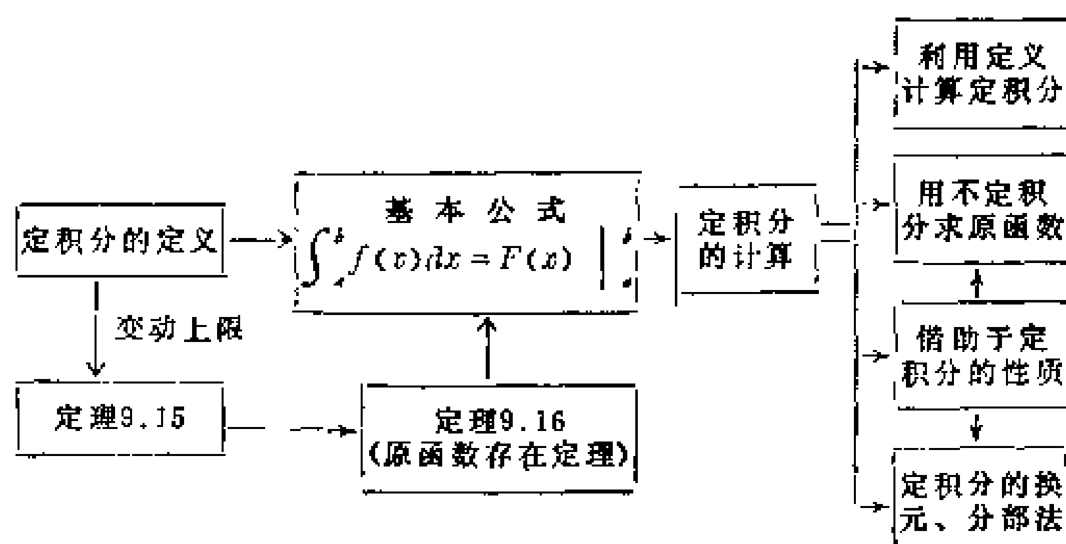
2 定积分的定义，可积准则及可积函数类之间的关系



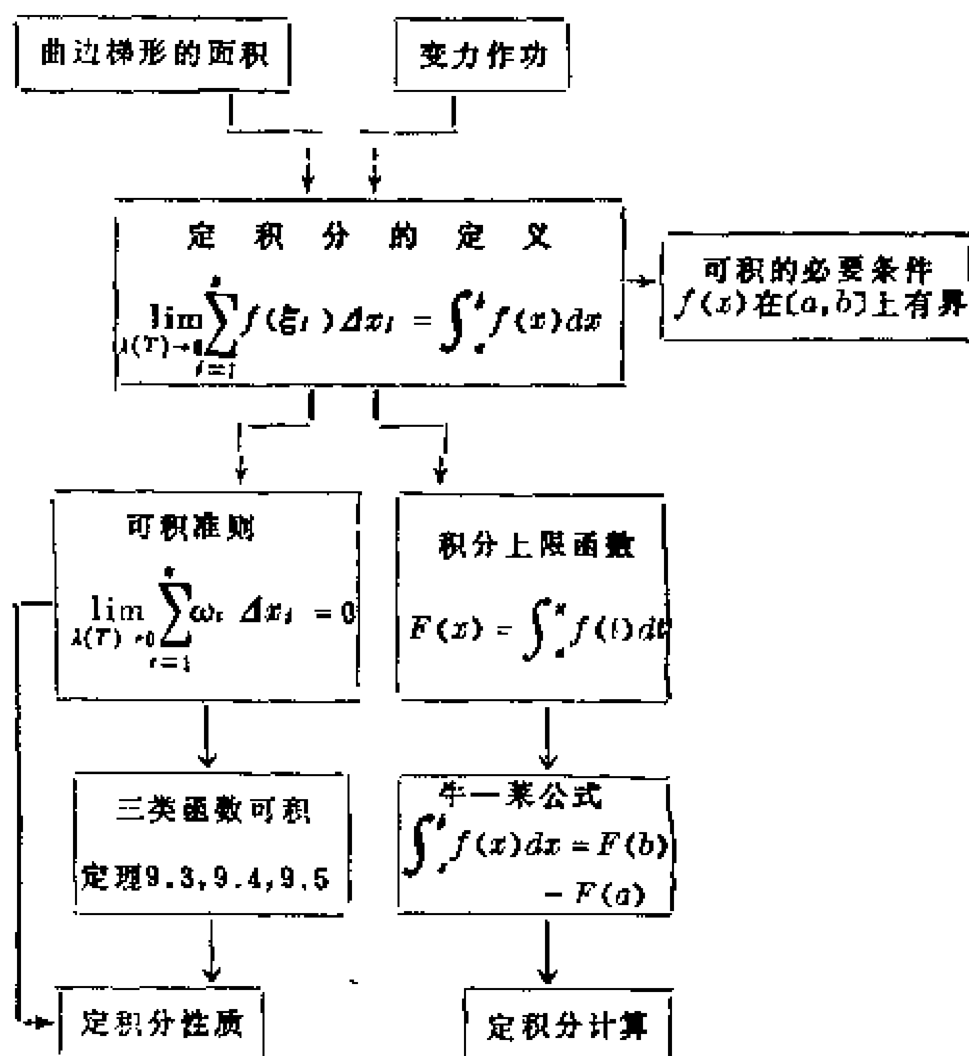
3 定积分的性质及分类



4 微积分基本公式与定积分的计算之间的关系



5 本章的整体关系



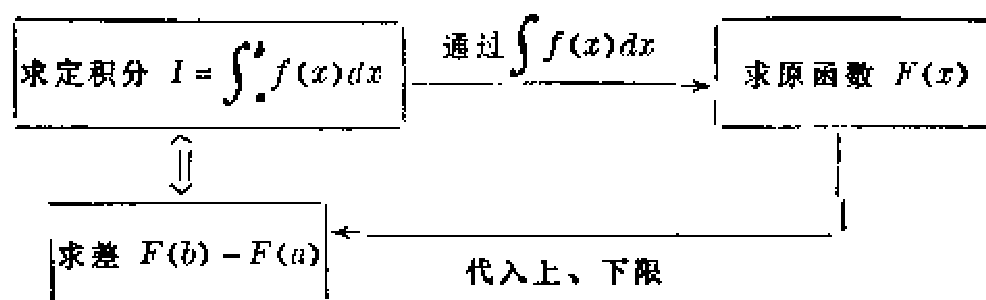
二 几点说明

1 再说定积分与不定积分

定积分与不定积分是两个截然不同的概念，前者是数，后者是个函数族。然而，在谈到定积分与不定积分的关系时，微积分基本公式起着纽带作用，即在求定积分

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

时，首先，求被积函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，即求不定积分 $\int f(x)dx$；其次，作原函数 $F(x)$ 在上限 b 与下限 a 的差 $F(b)-F(a)$，就得定积分值。它们之间的转化过程是这样：



2　在可积函数类中，“有界”条件是必要的，而“三定理”（9.3；9.4；9.5）的条件是充分的

关于“有界”条件是必要的，我们在定理 9.1中已证明，这里不必重述。这里将举二例虽不满足“三定理”的条件，但是都是可积的。

例 1　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & 当\ x\neq 0\ 时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时,\end{cases}$$

在区间$[0,1]$上可积。

证明　显然“三定理”的条件均不满足，在区间$[0, 1]$上的不连续点为　$x=0$，$x_n=\dfrac{1}{n}$　$(n=1, 2, \cdots)$。

如图9.10示，对任意给定的 $\varepsilon>0$，将区间$[0,1]$分为两个子区间$\left[0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$及$\left[\dfrac{\varepsilon}{2}, 1\right]$。由于 ε 是给定的，因此在区间$\left[\dfrac{\varepsilon}{2}, 1\right]$上函数 $f(x)$只有有限个间断点。根据定理9.4知，函

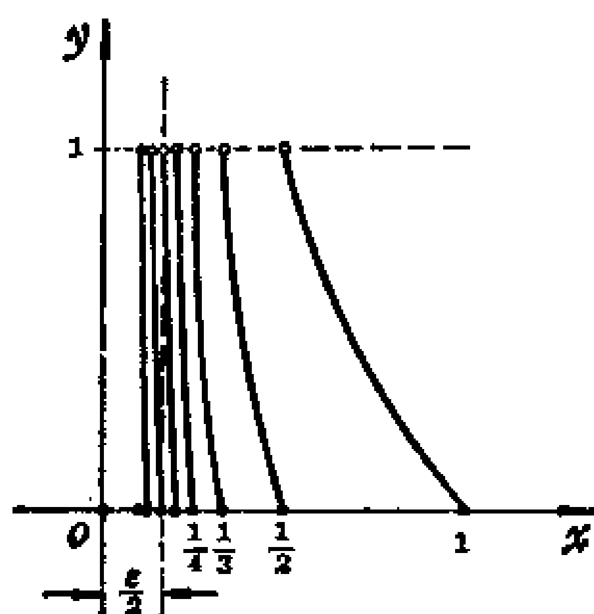


图 9.10

数 $f(x)$ 在$\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]$上可积.当区间被分割$T$（其中$\frac{\varepsilon}{2}$算一分点）分得如此之小，使之在$\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]$上有

$$\sum_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有界，即 $0\leqslant f(x)<1$，所以有 $\omega_i<1$. 故有

$$\sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}\omega_i\Delta x_i<1\cdot\sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，就有

$$\sum_{0}^{1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

根据可积准则知，函数 $f(x)$在$[0,1]$上可积.

例 2　证明黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{当 } x=\frac{m}{n}\text{ 时，} m\text{ 和 } n \text{ 为互质的整数，且 } n\geqslant 1,\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时，}\end{cases}$$

在区间$[0,1]$上可积．其图象如图1.10示．

在第三章里我们已证明函数 $f(x)$ 在无理点上都连续，但在 $x\neq 0$ 的有理点上都不连续．显然，函数 $f(x)$ 不满足“三定理”的条件，然而，却可以证明 $f(x)$在$[0,1]$上可积．

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，取正整数 N，使$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$．

于是对给定的N，将函数 $f(x)$对应有理点的函数值分为两组：一组是对应$\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{N}$的有理点，另一组是对应$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$的有理点．

在第一组中，由于N是给定的，这样的有理点在闭区间$[0,1]$上只是有限个，可做有限个闭区间 σ_1，σ_2，…，σ_l，使其长度和小于$\frac{\varepsilon}{2}$$\left(\text{即}\sum\limits_{i=1}^{l}\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}\right)$，且使有限个有理点分别含于其内．

我们构造一个分割T，使闭区间 $\sigma_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$的端点就是分割$T$的分点，当 $\lambda(T)<\delta=\min\{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_l\}$时，令其 $\varDelta_1$，$\varDelta_2$，…，$\varDelta_m$ 代表分割T中异于闭区间 σ_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$的子区间．显然，属于 $\varDelta_i(i=1,2,\cdots,\ m)$ 的所有有理点所对应的函数值为第二组，故有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{\varDelta_i}\varDelta_i<\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\varDelta_i<\frac{\varepsilon}{2}(1-0)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意分割 T，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{l}\omega_{\sigma_i}\sigma_i\leqslant 1\cdot\sum_{i=1}^{l}\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (\text{因}\ \omega_{\sigma_i}\leqslant 1),$$

即

$$\sum_{i}^{1}(T)=\sum_{i=1}^{l}\omega_{\sigma_i}\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\omega_{\varDelta_i}\varDelta_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

根据可积准则知，$f(x)$ 在$[0,1]$上可积。

3　利用可积准则证明函数可积性的方法

利用可积准则证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，即估计$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$可否为任意小(当$\lambda(T)$任意小时)。不难看出，直接影响和数$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 的因素有二：一个是函数 $f(x)$ 的振幅ω_i，另一个是小区间长度 Δx_i $(i=1, 2, \cdots, n)$。在这两个因素的制约下，以下三种情形均可使和数$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 为任意小。

（1）如果 $\omega_i<\varepsilon$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，且$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a).$$

（2）如果$\sum_{i=1}^{n}\omega_i$有界，即$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\leqslant M$（常数），且$\lambda(T)=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}<\delta\leqslant\varepsilon$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\lambda(T)\sum_{i=1}^{n}\omega_i<\varepsilon M.$$

（3）如果部分小区间的长度之和 $\Sigma'\Delta x_k<\varepsilon$，而其上的 ω_k 有界，即 $\omega_k\leqslant M$（常数），其余的小区间上的 $\omega_i<\varepsilon$，而这些小区间长度之和 $\Sigma''\Delta x_i\leqslant b-a$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\Sigma'\omega_k\Delta x_k+\Sigma''\omega_i\Delta x_i<M\Sigma'\Delta x_k$$

$$+\varepsilon\Sigma''\Delta x_i<M\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon\ (M+b-a).$$

证明函数的可积性，根据已知条件，使之符合上述要求。

现以证明过的定理9.3，定理9.5和上述的例1分析总结如下：

在定理9.5的证明过程中，因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，所以函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在公共的 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\omega_i<\varepsilon \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

以及对任意的分割 T，$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$ 是有界的．故本定理的证明可归结为上述第一种情形．

在定理9.5的证明过程中，因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调有界，所以当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增（不妨这样认为）时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=f(b)-f(a),$$

即 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ 是有界的；当 $\lambda(T)\to0$ 时，总可使

$$\lambda(T)=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}<\delta.$$

故本定理的证明可归结为上述第二种情形．

在上述例1的证明中，虽然函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有无穷多个间断点，但是，我们不难发现这些间断点 $x_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，当 $n\to\infty$ 时，不仅严格递减，并且以0为极限，以及函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界．为此把区间 $[0,1]$ 分割成 $\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$ 两部分．在区间 $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上，由于函数的振幅是有界的，而 $\sum_{0}^{i}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，在区间 $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$ 上，由于函数的间断点是有限个，且函数的振幅也是有界的．因此，可归结为第三种情形．

三　例题选讲

我们知道定积分的定义是构造性的，且积分和存在极限与分割T和点ξ_i的选取无关，因此，利用定积分的定义去判别某个函数在某个区间上是否可积一般很难实现，实际上，两个“任意”的要求我们就不易做到。然而，当已知某个和式的极限存在时，且该和式可视为是某个函数在指定区间上对应特定分割和特殊选取ξ_i所作的积分和，于是利用定积分求该和式的极限将是方便的。

例 1　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

基本思路　构造成积分和的形式，利用定积分求其极限。

解　首先将和式极限变成积分和的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

其次从积分和的极限中确定被积函数和积分限：因为积分和中含有因子$\frac{1}{n}$，即$\Delta x_i=\frac{1}{n}$　$(i=1,2,\cdots,n)$，所以区间长度为1；在另一个因子$\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)$中含有$\frac{i}{n}$，即说明点　$\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$(取右端点)，并且看出被积函数为$\frac{1}{1+x}$；当 $i=n$ 时，则

有 $\xi_n = x_n = \frac{n}{n} = 1$，即积分上限为 1，当然下限为0。

最后，利用定积分求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

例 2 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

基本思路 同例 1。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{0\cdot\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n},$$

所以，不难看出被积函数是 $\sin x$，积分上限为 π，下限为0。从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

例 3 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

基本思路　同例1.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right],$$

所以，不难看出被积函数是 $f(x)$，积分上限为 b，下限为a。从而有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

例 4　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数时,}\\ -1, & \text{当}x\text{为无理数时.}\end{cases}$$

证明：$|f(x)|$ 在任何有限区间$[a,\ b]$ $(a<b)$ 上可积，但 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不可积。

基本思路　对 $|f(x)|$利用定理9.3，对 $f(x)$ 利用 §9.2 第三段可积准则的否定叙述。

证明　因为

$$|f(x)|\equiv 1,\quad x\in[a,\ b],$$

所以函数 $|f(x)|$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，根据定理 9.3 知，函数 $|f(x)|$在 $[a,\ b]$上可积。

不妨取 $\varepsilon_0=b-a$，对任意的 $\delta>0$，由于函数 $f(x)$在任何部分区间上的振幅均为 2，因此当 $\lambda(T)<\delta$时，也有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=2(b-a)>b-a=\varepsilon_0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积。

例 5 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ $(a>0)$ 上连续。

（1）当 $f(x)$ 为奇函数时，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$；

（2）当 $f(x)$ 为偶函数时，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$。

基本思路 利用积分区间的可加性和代换 $x=-t$。

证明 这里只证明（1），同理可证（2）。根据积分区间的可加性，有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

再对等式右端第一个积分作代换 $x=-t$，$dx=-dt$，且当 x 从 $-a$ 变到0时，t 从 a 变到0，有

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx=-\int_{a}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt$$

$$=\int_{0}^{a} f(-x)dx。$$

由于函数 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，因此

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0。$$

例 6 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，则：

（1）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$。

基本思路 利用变量代换。

证明 （1）令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，有 $dx=-dt$。当 x 从0变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到0；且

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,$$

有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

（2）令 $x=\pi-t$，有 $dx=-dt$。当x从0变到π时，t从π变到0，有

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=-\int_\pi^0(\pi-t)\,f\,[\sin(\pi-t)]\,dt$$

$$=\int_0^\pi(\pi-t)\,f(\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi(\pi-x)\,f(\sin x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx-\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx,$$

移项后可解得

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

例 7 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数，且以 T 为周期，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx,$$

其中 a 为任意数。

基本思路 利用变量代换和周期函数的定义。

证明 总存在整数 K，使 $a\in[KT,\ (K+1)T)$，有

$$KT\leqslant a<(K+1)T\leqslant a+T,$$

于是有

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_a^{(K+1)T} f(x)\,dx+\int_{(K+1)T}^{a+T} f(x)\,dx.$$

对等式右端第一个积分，作变量代换 $x=KT+y$，对第二

个积分作变量代换 $x=(K+1)T+z$，分别得

$$\int_a^{(K+1)T} f(x)\,dx=\int_{a-KT}^{T} f(KT+y)\,dy$$

$$=\int_{a-KT}^{T} f(y)\,dy=\int_{a-KT}^{T} f(x)\,dx,$$

$$\int_{(K+1)T}^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^{a-KT} f[(K+1)T+z]\,dz$$

$$=\int_0^{a-KT} f(z)\,dz=\int_0^{a-KT} f(x)\,dx.$$

根据积分区间的可加性，故得

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^{a-KT} f(x)\,dx+\int_{a-KT}^{T} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{T} f(x)\,dx.$$

例 8 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，且有 $f(x)\geqslant g(x)$，但 $f(x)\not\equiv g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx$.

基本思路 利用定积分的不等式性质和连续函数的保号性定理。

证明 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，显然，$F(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上非负的连续函数，且 $F(x)\not\equiv 0$. 我们不妨设在点 $x_0\in[a,\ b]$ 处，$F(x_0)>0$，根据定理3.2知，必存在一个小区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset[a,\ b]$，使 $F(x)$ 在该区间上恒为正. 从而有

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^{x_0-\delta} F(x)\,dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,dx$$

$$+\int_{x_0+\delta}^{b} F(x)\,dx,$$

其中

$$\int_a^{x_0-\delta} F(x)\,dx\geqslant 0,\quad \int_{x_0+\delta}^{b} F(x)\,dx\geqslant 0,$$

因为 $F(x)>0$，再根据定理9.11的推论1，所以有

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,dx>0,$$

于是

$$\int_a^b F(x)\,dx>0$$

亦即

$$\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx.$$

例 9　证明不等式

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx<\frac{\pi^2}{8}$;

（2）$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx<\frac{1}{2}$.

基本思路　利用上面的例8。

证明　（1）在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上，由于有

$$\sin^2 x\leqslant\sin x\leqslant x,$$

且 $\sin x\not\equiv x$，根据例 8，故知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

（2）在区间〔1, 2〕上，由于有

$$(1-x)^2=1-2x+x^2\geqslant 0,$$

即　　$1+x^2\geqslant 2x$,

亦即

$$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

且 $\frac{x}{1+x^2}\not\equiv\frac{1}{2}$，根据例 8，故知

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx<\int_1^2 \frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\ x\Big|_1^2=\frac{1}{2}.$$

例10　如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$ 在区间〔a, b〕上均为正值可积函数，且 $0<a<b$，则

$$\int_a^b [f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)]^{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$\leqslant\left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\int_a^b f_2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}\cdots\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}.$$

其中的 n为自然数。

基本思路 利用常数因子可以移到积分符号外和第一章例题选讲中证得的算术平均数不小于几何平均数。

证明 我们只须证

$$\frac{\int_a^b [f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)]^{\frac{1}{n}}dx}{\left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\int_a^b f_2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}\cdots\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}}\leqslant 1 \tag{1}$$

即可。

现在看不等式的左边，因为 $\left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}$，$\left[\int_a^b f_2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}$，$\cdots$，$\left[\int_a^b f_n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}}$都是数，根据定理9.6，所以可将这些数移到分子的积分号内

$$\int_a^b\left\{\left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)dx}\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\,dx}\right]^{\frac{1}{n}}\cdots\left[\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\,dx}\right]^{\frac{1}{n}}\right\}dx$$

$$=\int_a^b\left\{\left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)\,dx}\right]\cdot\left[\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\,dx}\right]\cdots\left[\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\,dx}\right]\right\}^{\frac{1}{n}}dx,$$

又根据 $(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$（其中 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为非负），则得

$$\int_a^b\left\{\left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)\,dx}\right]\cdot\left[\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\,dx}\right]\cdots\left[\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\,dx}\right]\right\}^{\frac{1}{n}}dx$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b\left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)\,dx}+\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\,dx}+\cdots+\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\,dx}\right]dx$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\int_a^b f_1(x)\,dx}{\int_a^b f_1(x)\,dx}+\frac{\int_a^b f_2(x)\,dx}{\int_a^b f_2(x)\,dx}+\cdots+\frac{\int_a^b f_n(x)\,dx}{\int_a^b f_n(x)\,dx}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n=1.$$

于是不等式（1）成立。

例11 已知函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 和它们的平方在区间$[a,\ b]$上可积，证明柯西——布尼亚可夫斯基①不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

基本思路 将不等式的左端变成参数 λ 的二次三项式，再确定判别式的符号。

证明 我们考察积分

$$I=\int_a^b[\lambda f(x)+g(x)]^2dx$$

① 布尼亚可夫斯基：Вуняковский, В.Я. 苏联数学家，1879—1943年。

其中任意的 $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. 由于被积函数是非负的，因此该积分也是非负的，即 $I \geqslant 0$.

现将被积函数展开，得

$$I = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx,$$

如令

$$A = \int_a^b f^2(x)dx, \quad B = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

$$C = \int_a^b g^2(x)dx,$$

则得

$$I = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0.$$

这是一个非负的二次三项式，故它的判别式必须小于等于零，即

$$4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC) \leqslant 0,$$

于是得

$$B^2 - AC \leqslant 0 \text{ 或 } B^2 \leqslant AC,$$

亦即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

例12 证明定理9.14.

基本思路 与定理9.13的证明过程类似.

证明 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，根据定理9.8知，乘积 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积。又已知 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 和 $g(x)$ 不变号（不妨假定 $g(x) \geqslant 0$），故得

$$mg(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a, b],$$

根据定理9.11的推论2，则得

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx. \tag{2}$$

如果 $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, 则从（2）式中得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0,$$

于是对任意的 μ，且 $m\leqslant\mu\leqslant M$，均有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx$$

成立。

如果 $\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$，用其除以不等式（2），则得

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\leqslant M.$$

此时将介于 m和M之间的常数

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

令作 μ，即

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

于是得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

如果 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，则由连续函数的介值定理知，在$[a,\ b]$上必存在一点 c，使

$$f(c)=\mu,$$

故得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

例13　利用积分第一中值定理证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$。

基本思路 利用积分第一中值定理和极限的两边夹定理。

证明 （1）因为在区间[0,1]上 $x^n\geqslant 0$，且 $\frac{1}{1+x}$ 连续，根据第一中值定理，所以得

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+c}\int_0^1 x^n dx$$

$$=\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1}\ x^{n+1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1},$$

其中 $c\in[0,\ 1]$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1}\to 0$，于是得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\ dx=0.$$

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，根据积分区间的可加性，故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx.\qquad(3)$$

对（3）式右端的第一个积分应用积分第一中值定理得

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx=\sin^n c\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\cdot dx$$

$$=\sin^n c\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n c,$$

其中 $c\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$。因为在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$上，$\sin c<1$，所以当 $n\to\infty$ 时，有 $\frac{\pi}{2}\sin^n c\to 0$。

对（3）式右端的第二个积分应用定理9.11的推论2得

$$0<\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\varepsilon=\varepsilon,$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0.$$

综合上述两个积分，于是得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0.$$

为了建立微积分基本公式．在§9.4的第三段里我们给出了积分上限函数的概念，在公式（9.14）的基础上又给出了

$$dF(x)=d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)\,dx,$$

亦即 $$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x).\qquad(4)$$

然而变动的上限并非就是自变量x，可以是 x 的函数，而下限也可以是x 的函数，于是，研究函数

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\,dt$$

的微分性质也是值得我们注意的。

例14　求下列函数的导数：

（1） $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\,dt;$

（2） $F(x)=\int_{a(x)}^{b}\sin t^2dt;$

（3） $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{(1+t^3)}dt;$

（4） $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt.$

基本思路　根据复合函数和上面的(4)式重点求(1)，余者均是它的特例。

解（1）因为

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \int_0^{b(x)} f(t)\,dt - \int_0^{a(x)} f(t)\,dt,$$

所以

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{b(x)} f(t)\,dt\right]$$

$$-\frac{d}{dx}\left[\int_0^{a(x)} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{d}{db}\int_0^{b(x)} f(t)\,dt \cdot \frac{db(x)}{dx} - \frac{d}{da}\int_0^{a(x)} f(t)\,dt \cdot \frac{da(x)}{dx}$$

$$= b'(x)\cdot f[b(x)] - a'(x) f[a(x)]. \qquad (9.19)$$

（2）因为 b是常数，所以 $b'=0$，代入公式(9.19)得

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b} \sin t^2 dt = -a'(x)\sin[a^2(x)].$$

（3）因为$a(x)\equiv 0$，代入公式(9.19)得

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}\,dt = 2x\frac{1}{1+x^6}.$$

（4）代入公式(9.19)得

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt = -\sin x\cos(\pi\cos^2 x)$$

$$-\cos x\cos(\pi\sin^2 x) =$$

$$-\sin x[\cos(\pi - \pi\sin^2 x)] - \cos x\ \cos\ (\pi\sin^2 x)$$

$$= -\sin x[-\cos(\pi\sin^2 x)] - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$

$$= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

例15　求极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$，

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

基本思路 应用洛比达法则.

解 （1）不难看出，当 $x\to 0+0$时，这是$\frac{0}{0}$型的，应用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

（2）不难看出，当 $x\to +\infty$时，这是$\frac{\infty}{\infty}$型的，应用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

例16 已知 $f(x)$为连续的正值函数，证明：当 $x\geqslant 0$时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x t\,f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

严格递增.

基本思路 在区间 $[0,+\infty)$ 上研究导函数的符号.

证明 由于函数 $\varphi(x)$的导数可写成

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}\left[\int_0^x f(t)dt\cdot xf(x)\right.$$

$$\left.-\int_0^x t\,f(t)dt\cdot f(x)\right]$$

$$=\frac{f(x)}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}\left[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right],$$

且 $x\cdot\int_0^x f(t)dt=\int_0^x xf(t)dt$（$x$与积分变量 t 无关），因此有

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

又因为 $f(x)$ 为正值函数，而且 $t\in[0,\ x]$，所以 $(x-t)f(t)\geqslant 0$，但又 $(x-t)f(t)\not\equiv 0$。根据例 8，得

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$$

于是

$$\varphi'(x)>0.$$

故函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增。

关于利用递推公式来计算依赖于参数 $n\in N$ 的定积分，在§9.5的例 7 中仅仅给出了

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases} \tag{5}$$

这里将补充如下。

例17 计算定积分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}x dx.$$

基本思路 利用换元法建立递推公式。

解 令 $\mathrm{tg}x=y$，有

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}x\,dx=\int_0^1\frac{y^{2n}}{1+y^2}dy$$

$$=\int_0^1 y^{2n-2}dy-\int_0^1\frac{y^{2n-2}}{1+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{2n-1} y^{2n-1} \Big|_0^1 - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

于是得

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5}$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{1} + (-1)^n I_0,$$

$$= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5}$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

例18　计算定积分

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

基本思路　利用三角代换化成（5）式的形式。

解　令 $x = \sin t$，有

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx,$$

由公式（5）得

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!(2n)!!}$$

$$= \frac{[2^n \cdot n!]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

例19　计算定积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

基本思路　同例18。

解　令 $x = \sin t$，有

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

由公式（1）得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\ k\in N\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k+1,\ k\in N.\end{cases}$$

习　　题

§9.1

1. 利用定积分的定义计算下列定积分：

（1）$\int_{-1}^{2}x^2dx$；　　（2）$\int_0^1 a^x dx$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

§9.2

2. 证明，函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间[0, 1]上可积。

3. 若函数 $f(x)$于区间 [a, b]上绝对可积 （即积分$\int_a^b|f(x)|dx$存在），那么函数 $f(x)$在 [a, b]上是否可积？

§9.3

4. 利用定积分的性质判别下列各题中积分的大小：

（1）$\int_0^1 xdx$ 与$\int_0^1 x^2dx$；　　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ 与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$；

（3）$\int_0^1 e^{-x}dx$ 与$\int_0^1 e^{-x^2}dx$；　（4）$\int_1^2 \ln xdx$ 与$\int_1^2(\ln x)^2dx$.

5. 证明不等式：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx<\dfrac{\pi}{2}$；　　（2）$\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx<1$.

6. 证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}dx=0$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=0$.

7. 估计下列各积分的值：

（1）$\int_1^4 (1+x^2)dx$；　　（2）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x dx$。

§9.4

8．利用定积分求下列和的极限值：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$。

9．求下列函数的导数：

（1）$F(x)=\int_2^{e^x}(1+t^2)dt$；　（2）$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$。

10．试求函数 $y=\int_0^x \sin x dx$ 在$x=\frac{\pi}{4}$处的导数。

11．求由参数表示式

$$x=\int_0^t \sin z dz,\quad y=\int_0^t \cos z dz$$

给出的函数 y对 x 的导数。

12．证明：当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}$。

13．试求函数 $F(x)=\int_0^x\frac{3x+1}{x^2-x+1}dx$ 在$[0,1]$上的最大值和最小值。

14．已知 m，$n\in N$，且 $m\neq n$，证明：

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0$；

（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=0$；

（3）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=0$。

15．已知 $m\in N$，证明：

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx=\pi$；

（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\pi$。

16．利用牛顿——莱布尼兹公式计算下列定积分：

（1）$\int_0^a (3x^2-x+1)dx$；　（2）$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$；

（3）$\int_4^9 \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})dx$；　（4）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$；

（5）$\int_0^2 |1-x|\,dx$；　（6）$\int_0^{\pi} (1-\sin^3\theta)d\theta$；

（7）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\theta\,d\theta$；　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$。

§9.5

17．利用定积分的换元公式，求下列积分：

（1）$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$；　（2）$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$；

（3）$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$；　（4）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$；

（5）$\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$；　（6）$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$；

（7）$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$；　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$；

（9）$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$；　（10）$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$。

18．检验下列定积分换元的正确性：

（1）$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$，　令 $x=\frac{1}{t}$；

（2）$\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$，　令 $x=\sin t$。

19．证明：$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\int_0^1 x^q(1-x)^p dx$，其中的 p 和 q 均为正数。

20．利用函数的奇偶性计算下列定积分：

（1）$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$；　　（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx$；

（3）$\int_{-2}^{2} x^3 \sin^2 x \cos x dx$；　（4）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$。

第十章　定积分的应用

在八、九两章的基础上，本章将讨论定积分的应用．由于定积分的应用比较广泛，这里不可能对所有问题一一进行讨论，因此，仅就一些常见的、具有代表性的问得进行研究．通过这些问题的研究，不仅给出应用定积分解决实际问题的基本方法，并且，进而培养分析问题和解决问题的能力．

§10.1　平面图形的面积

我们在§9.1中曾指出，定积分

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \tag{10.1}$$

的几何意义是：由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 以及 ox 轴所围成的曲边梯形的面积．然而，当在某个小区间上，$f(x)<0$ 时．因为面积是非负的，所以，由连续曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 以及 ox 轴所围成的平面图形的面积是

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10.2}$$

如图10.1示，(10.2)式所给出的平面图形的面积应表示如下：

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx.$$

若曲线 $y_1=f_1(x)$，$y_2=f_2(x)$ 在区间〔a，b〕上连续，且

$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，那么由 $y_1=f_1(x)$，$y_2=f_2(x)$ 以及直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$所围成的平面图形A（图10.2）的面积是

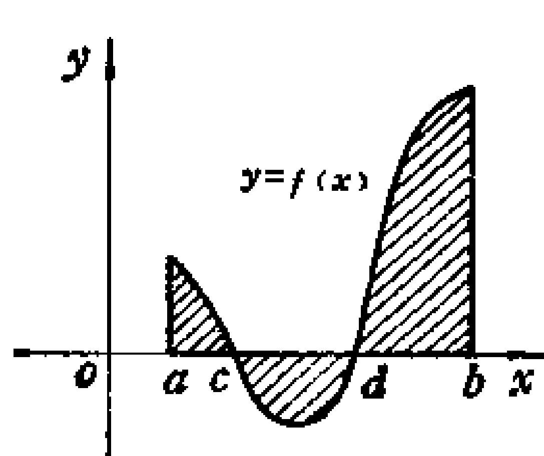


图10.1

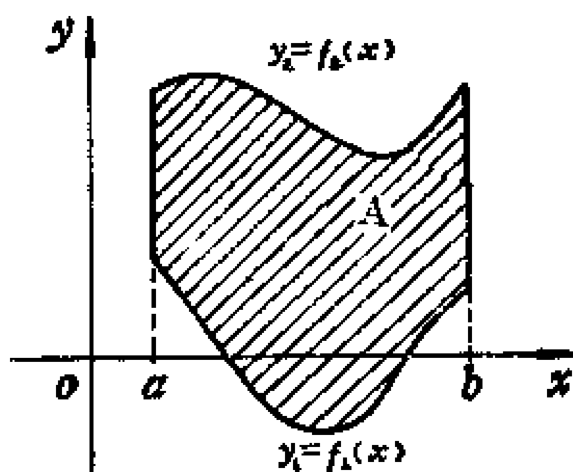


图10.2

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx. \qquad (10.3)$$

事实上，对区间 $[a,b]$给任意分割T：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$$

在小区间 $[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点 ξ_i，在点 ξ_i 处的小矩形的高为 $h_i=f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故小矩形的面积为

$$h_i\Delta x_i=[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i,$$

其和数为

$$\sum_{i=1}^n[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i,$$

取极限，得平面图形A的面积

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i$$
$$=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

在一般情况下，任意曲线所围成的平面图形可以看作是由若干个象上面那样的图形所组成．如图10.3示，可分割成三部分，而每一部分都可应用公式(10.3)．

如图10.4示，有时平面图形 B是由曲线

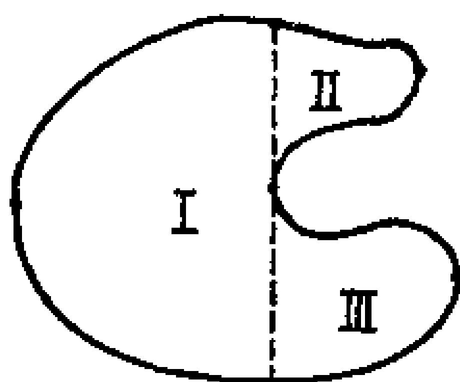


图10.3

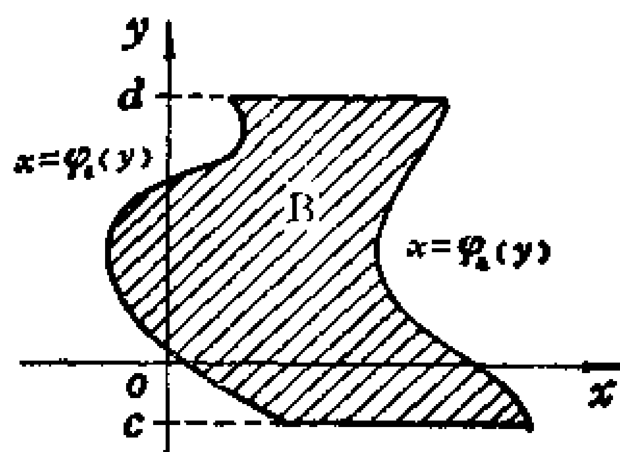


图10.4

$$x_1=\varphi_1(y),\quad x_2=\varphi_2(y)$$

以及直线， $y=c$，$y=d$ $(c<d)$所围成。与公式(10.3)类似，其面积S由公式

$$S=\int_c^d[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]dy \qquad (10.4)$$

给出。

例1 求位于抛物线 $x^2=4ay$ 与箕舌线 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ $(a>0)$ 之间的平面图形的面积（如图10.5）。

解 解联立方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4a}, \\ y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}, \end{cases}$$

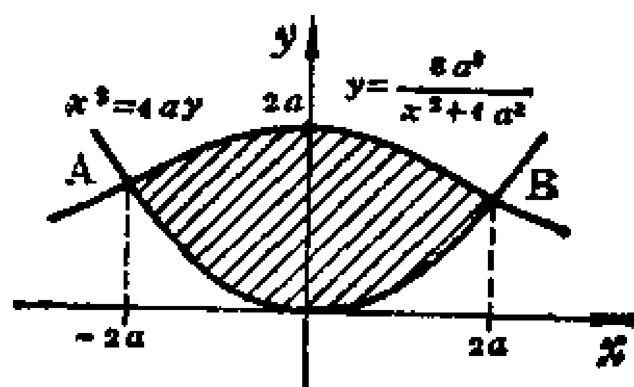


图10.5

得两条曲线的交点

$$A(-2a,a)\ \text{及}\ B(2a,a).$$

由于图形关于 y 轴是对称性， 因此其图形的面积是对应区间 $[0,2a]$ 上图形面积的2倍．于是，应用公式(10.3)得

$$S=2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx$$

$$=16a^3\cdot\frac{1}{2a}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{2a}\Big|_0^{2a}-\frac{1}{6a}x^3\Big|_0^{2a}$$

$$=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right).$$

例 2 求由抛物线 $(y-1)^2=2x$ 与直线 $y=x-3$ 所围成的平面图形的面积（如图10.6）.

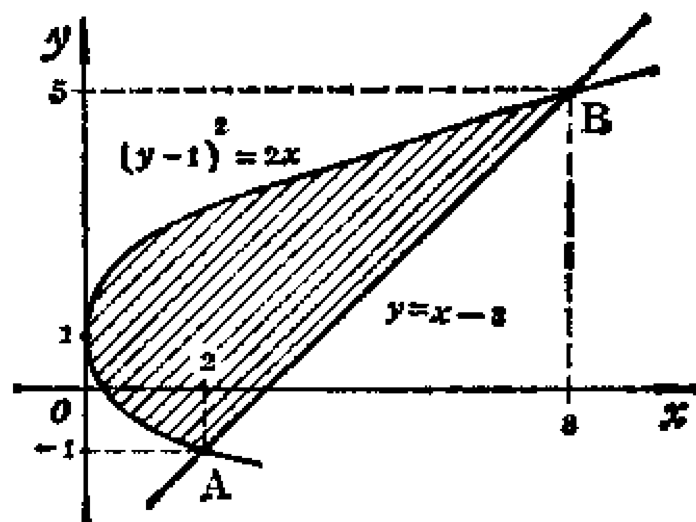


图10.6

解 解联立方程组

$$\begin{cases}(y-1)^2=2x,\\ y=x-3,\end{cases}$$

得抛物线与直线的交点

$$A(2,-1)\ \text{及}\ B(8,5),$$

于是，应用公式(10.4)得

$$S=\int_{-1}^{5}\left[(y+3)-\frac{(y-1)^2}{2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{5}\left(-\frac{y^2}{2}+2y+\frac{5}{2}\right)dy$$

$$=\left(-\frac{1}{6}y^3+y^2+\frac{5}{2}y\right)\Big|_{-1}^{5}$$

$$=39-21=18.$$

若曲线由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

给出，其中函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间$[\alpha,\beta]$ 上连续，且$\varphi(\alpha)=a$，$\alpha(\beta)=b$ 以及 $\varphi'(t)$ 存在，且 $\varphi'(t)>0$，那么由曲线 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 以及 ox 轴所围成的平面图形的面积由

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|\psi(t)|\varphi'(t)dt \tag{10.5}$$

给出。对 $\varphi'(t)<0$ 的情况，只须注意$\varphi(\beta)=a$，$\varphi(\alpha)=b$ 即可。

例 3 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积。

解 如图10.7示，因为椭圆关于两个坐标轴都是对称的，所以它的面积为

$$S=4\int_0^a y(x)dx.$$

为了避免从椭圆方程中解 y，以及繁琐的计算，我们利用椭圆的参数方程

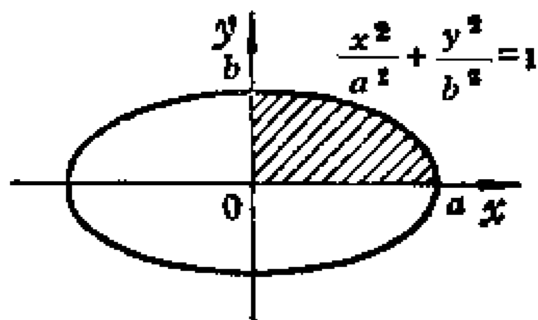


图10.7

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

和公式(10.5)求其面积。由于只考虑第一象限的面积，因此，当 x从 0 变到 a 时，t 从$\frac{\pi}{2}$变到 0；在这个区间上 $x'(t)=-a\sin t<0$。有

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\pi ab.$$

特别地，当 $a=b$ 时，就得到圆的面积为 πa^2。

例 4 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 的一个拱与 x轴所围成的平面图形的面积（如图10.8）

解 当 $t=0$，2π 时，$y=0$，故知当 t 从0变到 2π 时，

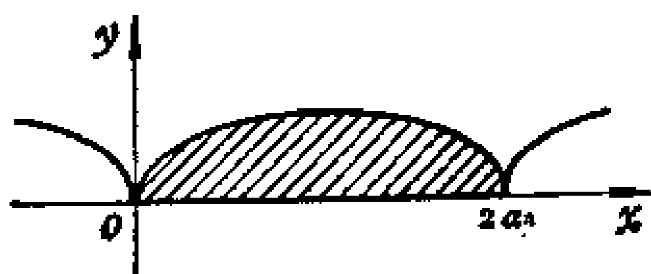


图10.8

恰好是摆线的一个拱。于是，应用公式(10.5)得

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt=3\pi a^2.$$

若曲线由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta)$$

给出，其中的 $\rho(\theta)$在 $[\alpha,\beta]$上连续，且 $\rho(\theta)\geqslant 0$，那么由二射线 $\theta=\alpha$和 $\theta=\beta$，且$\alpha<\beta$，以及曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 所围成的平面图形的面积由

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta \tag{10.6}$$

给出。

事实上，如图10.9示，用任意分割T将 $[\alpha,\beta]$分成 n个小区间，其分点为： $\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{i-1}<\theta_i<\cdots<\theta_n=\beta$，记 $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$；$\lambda(T)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta\theta_i\}$。

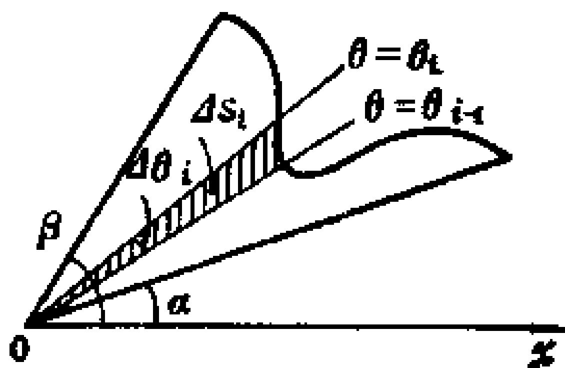


图10.9

又作 $n-1$条射线 $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, $\cdots$, $\theta=\theta_{n-1}$，这样将平面图形分成 n 个小块。将第 i 块的面积记 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$。由于 ΔS_i 的面积可近似的用 $\theta=\theta_{i-1}$ 与 $\theta=\theta_i$ 之间的扇形面积

$\frac{1}{2}\rho^2(\theta'_i)\Delta\theta_i$（其中 $\theta'_i\in[\theta_{i-1},\theta_i]$）表示，即

$$\Delta S_i \doteq \frac{1}{2}\rho^2(\theta'_i)\Delta\theta_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

因此有近似公式

$$S \doteq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\theta'_i)\Delta\theta_i,$$

于是，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，平面图形的面积

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\theta'_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta.$$

例 5 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$（$a>0$）所围成平面图形的面积（如图10.10）.

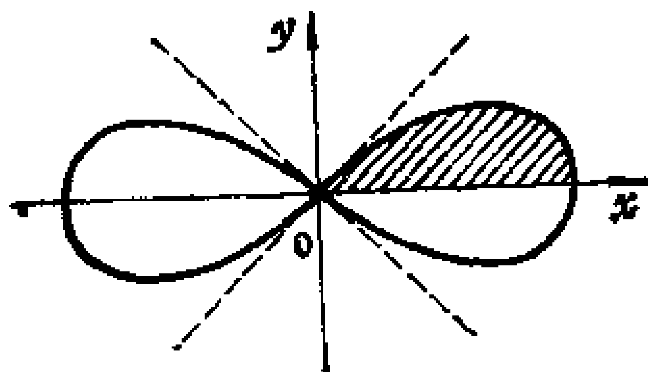


图10.10

解 因为 $\rho^2\geqslant 0$，所以 θ的取值范围是

$$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]与\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right].$$

又由于图形关于两个坐标轴的对称性，因此我们只考虑第一象限的面积就可以了. 于是，应用公式（10.6）得

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=a^2.$$

§ 10.2 平面曲线的弧长及曲率

一 平面曲线的弧长

我们知道，直线的长度完全可采用直接度量的方法得到。然而，求一条曲线的长度这种方法是行不通的，这里将采用“割园术”的方法给出曲线长度的概念。

定义 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一条连续曲线（图10.11）。任给一个分割T将区间 $[a,b]$分成 n个小区间，对应每个分点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$作垂直于 x轴的直线与曲线AB的交点分别是：$A=M_0$, M_1, $\cdots$, M_{i-1},

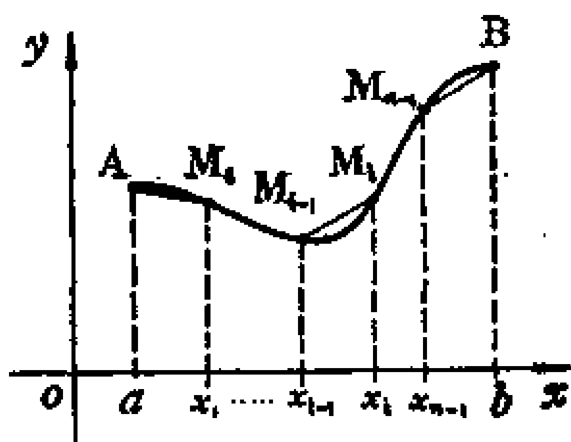


图10.11

M_i, $\cdots$ $M_n=B$. $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\cdots$, $\overline{M_{i-1}M_i}$, $\cdots$, $\overline{M_{n-1}B}$ 为曲线AB 的内接折线的各段之长，其中$\overline{M_{i-1}M_i}$的长度为

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

而和数

$$l(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} \qquad (1)$$

为内接折线的长度。如果极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} l(T)$$

存在，则称曲线AB是可求长的，其极限为**曲线AB的长度**。

为了计算曲线 AB 的长度，又设曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$上有连续导数 $f'(x)$（亦称曲线是**光滑的**）。根据拉格

朗日定理有

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

故，（1）式可写成

$$l(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+f'^2(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

由于 $f'(x)$ 连续，当然 $\sqrt{1+f'^2(x)}$ 也连续，因此 $\sqrt{1+f'^2(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积，于是，曲线 AB 的长度为

$$l=\lim_{\lambda(T)\to 0}l(T)=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{10.7}$$

在公式(10.7)中，如把积分上限改为变量 x，则弧长 l 是积分上限 x 的函数，即

$$l(x)=\int_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt,$$

因为 $\sqrt{1+f'^2(x)}$ 连续，根据定理9.16，所以有

$$\frac{dl(x)}{dx}=\sqrt{1+f'^2(x)},$$

亦即

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}, \tag{10.8}$$

通称为弧微分公式。

例1 求悬链线 $y=chx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，从 $x=0$ 到 $x=1$ 的弧长（如图10.12）。

解 由于

$$y'=\text{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$$

因此

$$\sqrt{1+f'^2(x)} =$$

$$\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ch}x.$$

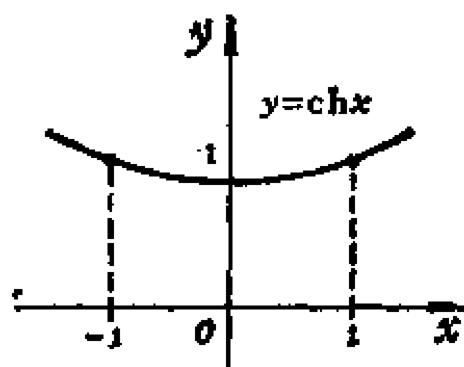


图10.12

由公式(10.7)得

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \mathrm{ch}x dx$$

$$= \mathrm{sh}x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-e^{-1}).$$

如果曲线 l 由参数方程

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in[\alpha,\beta]$$

给出，且 $\varphi'(t)$与 $\psi'(t)$在 $[\alpha,\beta]$上连续，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则曲线的长度为

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{10.9}$$

事实上，在区间$[\alpha,\beta]$中插入 $n-1$个分点：

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta,$$

记为分法T. 连接各分点得一内接折线，在折线上第 k个线段的两个端点坐标为 $[\varphi(t_{k-1}),\ \psi(t_{k-1})]$及 $[\varphi(t_k),\ \psi(t_k)]$，它的长度为

$$\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2}.$$

因为 $\varphi(t)$与$\psi(t)$在区间 $[\alpha,\beta]$ 上都具有连续的导数，根据拉格朗日中值定理，有

$$\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\varphi'(\tau_k)\Delta t_k,\ \ \tau_k\in(t_{k-1},t_k),$$

$$\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})=\psi'(\tau'_k)\Delta t_k,\ \ \tau'_k\in(t_{k-1},t_k),$$

其中 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

因此曲线 l的内接折线的全长为

$$l(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau'_k)]^2}\ \Delta t_k$$

如果这个积分和中的每一项的开方号下 τ_k 与 τ'_k 是同一个值（如都是 τ_k），则

$$\sigma(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau_k)]^2}\Delta t_k$$

是函数 $z=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上所构成的积分和，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，积分和 $\sigma(T)$ 以定积分

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\psi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

为极限。

为此有必要估计用$\sigma(T)$代替 $l(T)$ 所产生的误差．由于有

$$|l(T)-\sigma(T)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau'_k)]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau_k)]^2}\Big|\Delta t_k,$$

因此

$$|l(T)-\sigma(T)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\psi'(\tau_k)-\psi'(\tau'_k)|\,\Delta t_k①.$$

又因为 $\psi'(t)$在闭区间 $[\alpha,\beta]$上连续，根据康托定理知，所以函数 $\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上必为一致连续．即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 t_1，$t_2\in[\alpha,\beta]$，当 $|t_1-t_2|<\delta$时，有 $|\psi'(t_1)-\psi'(t_2)|<\varepsilon$。

这样以来，当分法T无限加细时，使 $\lambda(T)<\delta$，且 $|\tau_k-\tau'_k|<\delta$，有

$$|\psi'(\tau_k)-\psi'(\tau'_k)|<\varepsilon,$$

从而得

$$|l(T)-\sigma(T)|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon(\beta-\alpha).$$

---

① 因为 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right|\leqslant|b-b_1|$。

或 $$\lim_{\lambda(T)\to 0}[l(T)-\sigma(T)]=0.$$

于是，有

$$l=\lim_{\lambda(T)\to 0}l(T)=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

例 2　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的周长.

解　为了计算方便仍将椭圆方程表示成参数方程

$$x=a\sin t,\quad y=b\cos t$$

的形式，从而有

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=a\sqrt{1-k^2\sin^2 t},$$

其中 $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$为椭圆的离心率.

由于曲线是对称的，只需求出椭圆在第一象限内那部分长度就可以了. 于是，椭圆的周长

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt.$$

这就是第八章几点说明中的第二型椭圆积分. 既然它的原函数不能表示成有限形式，因此微积分基本公式就不能应用. 但是，可通过近似计算的方法将它表示为

$$l\doteq\pi\left[\frac{3(a+b)}{2}-\sqrt{ab}\right].$$

特别地，当 $a=b$ 时，则椭圆离心率为 0，这时圆的周长为

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=2\pi a.$$

若曲线由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$$

给出. 这时，由于直角坐标 x，y与极坐标 ρ,θ 之间的关系是

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$$

因此有

$$dx=\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta,\ \ dy=\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta,$$

代入弧微分公式得

$$dl=\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\theta^2}=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$

于是，有

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta. \tag{10.10}$$

例 3 一根弹簧按螺线 $\rho=a\theta$ 盘绕 10圈，圈与圈之间相隔 10毫米，求弹簧的长（如图10.13）.

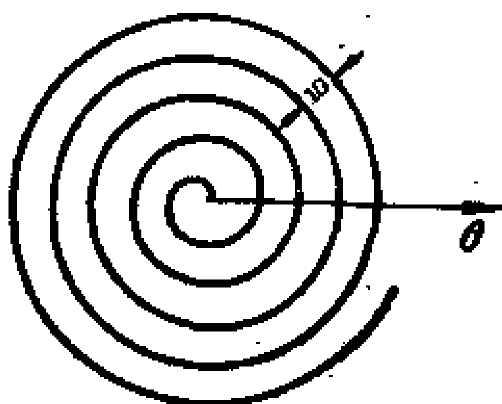


图10.13

解 因为弹簧共绕10圈，所以极角 θ 应从0变到 $2\pi\times10=20\pi$. 又因为，圈间间隔10毫米，当 θ从0变到 2π 时，ρ 就从 0 变到 $\rho=a\cdot2\pi=10$，所以可确定 $a=\frac{10}{2\pi}=\frac{5}{\pi}$.

于是，应用公式(10.10)有

$$l=\int_0^{20\pi}\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\,d\theta=a\int_0^{20\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]\Big|_0^{20\pi}$$

$$=\frac{5}{2\pi}\left[20\pi\sqrt{1+400\pi^2}+\ln(20\pi+\sqrt{1+400\pi^2})\right]$$

$$\doteq3145\text{（毫米）}.$$

二 平面曲线的曲率

在生产实践中，考虑曲线的弯曲程度是不可缺少的。例如，在铁路工程设计中，对其弯道处铁轨的弯曲程度必须给予周密的分析；又如，在预制钢筋混凝土电柱时，必须计算它在

最大外力的作用下弯曲程度，否则在超负荷的作用下电柱就要折断等等。

在这一段里，我们从分析曲线各点处弯曲程度的局部性态入手，进而给出曲率、曲率半径和曲率圆的概念。

如何来度量一条平面曲线的弯曲程度呢？如图10.14示，试考察一条平面光滑曲线 l 上的两个弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A_1B_1}$。当点 A 沿曲线运动到点 B 时，点 A 处的切线也随之转动到点 B 处的切线，其中角 $\Delta\varphi$ 就是**切线方向改变量**，同样也可得到 $\Delta\varphi_1$ 代表弧段 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 的切线方向改变量。到此我们似乎得到了度量曲线弯曲程度标志——弧段的切线方向改变量。然而，这是片面的，因为切线方向改变量的大小不仅与弧段弯曲程度有关，并且与弧段的长短有关。例如，如图10.15，弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 是半径为1的圆弧，弧段 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 是半径为5的圆弧，这两种情况均得到切线方向的改变量 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\varphi_1$，且 $\Delta\varphi=\Delta\varphi_1=90°$。在这种情况下我们不能说两个曲线弧段的弯曲程度是相同的，实际上，弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 上切线改变量的平均

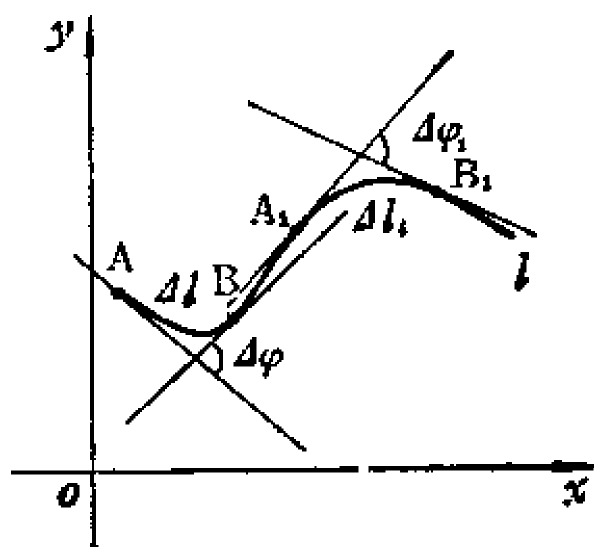


图10.14

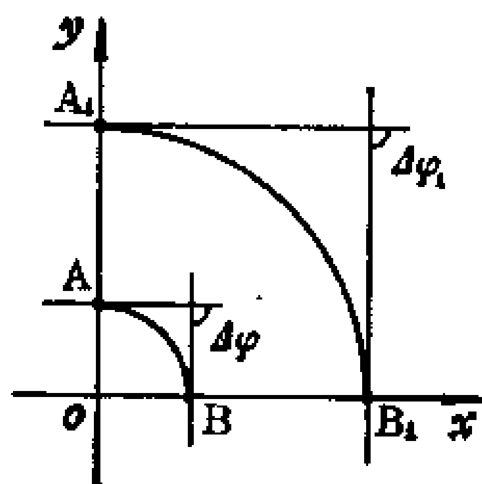


图10.15

值 $\dfrac{\Delta\varphi}{\frac{\pi}{2}}=1$，而弧段 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 上切线改变量的平均值 $\dfrac{\Delta\varphi_1}{\frac{10\pi}{4}}=$

$\frac{1}{5}$，即$1>\frac{1}{5}$。因此，弧段$\widehat{AB}$的弯曲程度比弧段$\widehat{A_1B_1}$的弯曲程度大得多。

从上述分析可以断言：曲线l的弯曲程度不仅与切线方向改变量$\Delta\varphi$有关并且与其弧段长Δl有关。于是，用单位弧长上的切线方向改变量来度量平面光滑曲线的弯曲程度是合理的。如图10.14示，如设l为平面光滑曲线，弧段$\widehat{AB}$的切线方向改变量为$\Delta\varphi$，其弧长为Δl，则曲线段$\widehat{AB}$的弯曲程度由

$$\overline{k}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$$

来刻划。在多数情况下，由于弧段$\widehat{AB}$的各点处弯曲程度的不一样，因此$\overline{k}$只是弧段$\widehat{AB}$的平均弯曲程度，故称$\overline{k}$为**平均曲率**。

为了刻划曲线弧段$\widehat{AB}$上点A处的弯曲程度，必须考虑在$\Delta l\to0$的情况下平均曲率$\overline{k}$的极限，为此给出如下定义：

定义 当$\Delta l\to0$（即点B沿曲线趋于点A）时，如果弧$\widehat{AB}$的平均曲率存在极限，并记

$$k=\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=\frac{d\varphi}{dl},\tag{2}$$

称k为曲线$\widehat{AB}$在点A处的**曲率**。

下面我们进一步给出在直角坐标系下曲线在一点处曲率的计算公式。设曲线方程是由$y=f(x)$给出的，且在区间$[a,b]$上$f'(x)$连续，$f''(x)$存在。如图10.16示，对应任意一点$x\in(a,b)$的弧长等于

$$l(x)=\int_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt,$$

再根据定理9.16，故有

$$dl=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx。\tag{3}$$

另外，由导数的几何意义知：$tg\varphi = y'$，从而 $\varphi = \operatorname{arctg} y'$，又因为我们只考虑切线方面改变量，而不考虑它的方向，所以有

$$d\varphi = \frac{|y''|}{1+y'^2}dx.$$

（4）

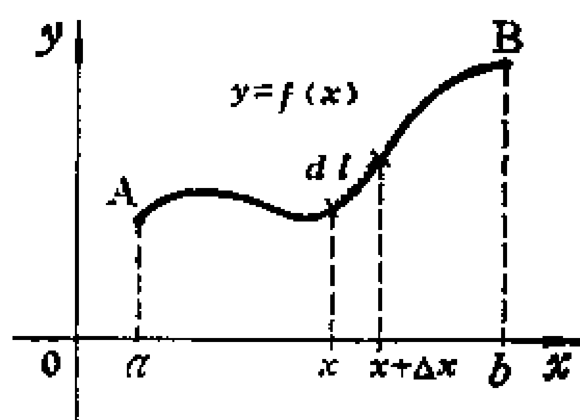


图10.16

将（3）和（4）代入（2），得

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10.11}$$

这就是在直角坐标系下曲线在一点处曲率的计算公式。

通常我们把曲线上一点P的曲率k的倒数称为点P处的**曲率半径**，记作

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

例 4　求圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上任一点的曲率和曲率半径。

解　由 $y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$，得$y' = \mp\frac{x}{y}$，$y'' = \pm\frac{R^2}{y^3}$，于是有

$$k = \frac{R^2}{y^3\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R},$$

而 $\rho = R$。

例 4 表明：圆周上任何一点的曲率都是常数，即 $k = \frac{1}{R}$；而曲率半径 ρ正好等于圆的半径。

三　曲率圆与曲率中心

曲率半径 $\rho = \frac{1}{k}$的几何意义是什么？如图10.17示，在曲线l

的点A处作曲线的切线与法线，在曲线凹的一侧取法线上的一点O'，使 $O'A=\rho$。然后以 O' 为心以 ρ 为半径作一圆，如果，这个圆与曲线 l 在点A处有相同的y, y'；和 y''，则称圆与曲线在点A处有**二阶密切**。圆与曲线在点A处的二阶密切表明：

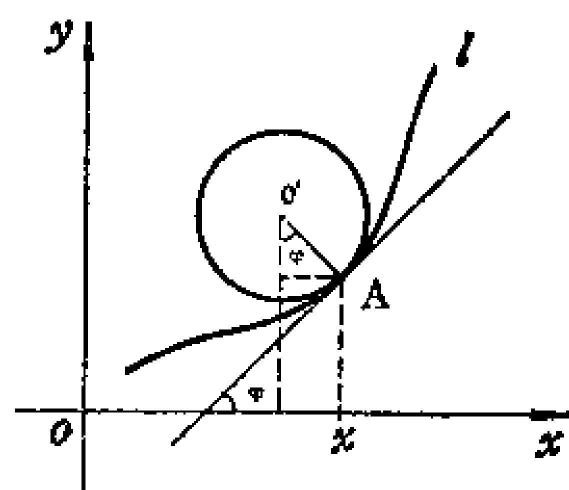


图10.17

圆与曲线相切的程度比切线与曲线相切的程度要好得多，为此我们把这个圆叫做曲线 l 在点A的密切圆，其半径恰好是曲率半径，所以又叫做**曲率圆**。曲率圆的圆心 O' 自然叫做**曲率中心**。

下面给出如何求曲率中心的方法。

在图10.17中，函数 $y=f(x)$ 在点A处上凹且严格递增。根据第六章的定理6.6和定理6.2知，$y''>0$，$y'>0$。并设曲率中心的两个坐标为 ξ, η，过点A的切线与 ox轴的交角为φ。这时从图不难看出

$$x-\xi=\rho\sin\varphi,\quad \eta-y=\rho\cos\varphi,$$

从而得

$$\xi=x-\rho\sin\varphi,\quad \eta=y+\rho\cos\varphi. \tag{5}$$

由于 $\rho=\dfrac{1}{k}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$（因 $y''>0$），及 $\operatorname{tg}\varphi=y'$，因此得（如图10.18）

$$\sin\varphi=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

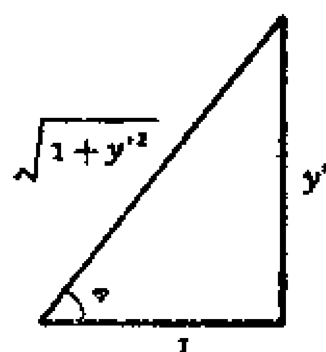


图10.18

代入（5）式。于是得到曲率中心的直角坐标公式

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (10.12)$$

应当注意：关于 y' 和 y'' 的其它情况上式仍成立。

例 5　求抛物线 $y=x^2$ 在点A (1,1)处的曲率半径和曲率中心。

解　因为 $y'=2x$，$y''=2$，由公式(10.11)得

$$k = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=1} = \frac{2}{5\sqrt{5}},$$

所以曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

又因为 $y'|_{x=1}=2$，$y''|_{x=1}=2$，所以由公式(10.12) 得

$$\xi = 1 - \frac{2(1+2^2)}{2} = -4,$$

$$\eta = 1 + \frac{1+22}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

例 6　铁轨转弯处的缓冲曲线。

火车从直线轨道（直线，曲率为 0，曲率半径为∞）进入到半径为R的弯道（圆弧，曲率为$\frac{1}{R}$，曲率半径为R）时，必须经过一段缓冲曲线（如图10.19 的虚线部分）。如果不是这样，即将其直线部分直接与圆弧连接，则将有如下情况发生．我们知道，火车沿直线轨道运行时，它的离心力等于

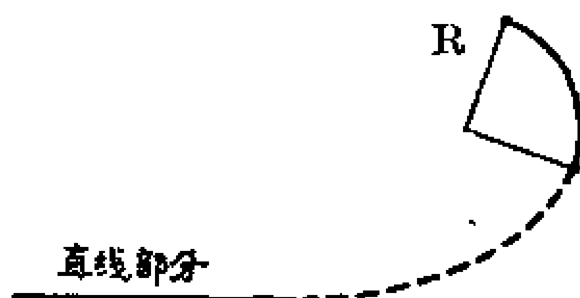


图10.19

0，当火车直接进入圆弧轨道时，由于曲率半径从∞突然变到 R，因此火车突然地产生离心力

$$F=\frac{mv^2}{R},$$

其中 R 是曲率半径，m 为火车的质量，v 为速度。这个突然产生的离心力对火车的安全运行是很不利的。为了克服这种现象，就必须把铁轨的直线部分与圆弧部分用缓冲曲线连接起来，缓冲曲线的作用是使火车的离心力由0逐渐（即连续）地增大到

$$F=\frac{mv^2}{R}.$$

这就要求曲率从0连续地增大到 $\frac{1}{R}$，这就是设计缓冲曲线的理论根据。然而，真正设计出比较理想的缓冲曲线是不容易的，一般都用立方抛物线近似地代替。

如图10.20，用 x 轴表示轨道的直线部分；$\overset{\frown}{OA}$ 是缓冲曲线，其方程为 $y=\frac{x^3}{6Rl}$，其中 l 表示 $\overset{\frown}{OA}$ 的弧长；$\overset{\frown}{AB}$ 是圆弧部分(圆心是 P，半径为 R)；设计时又要求比值 $\frac{l}{R}$ 较小，且 $a\doteq l$。

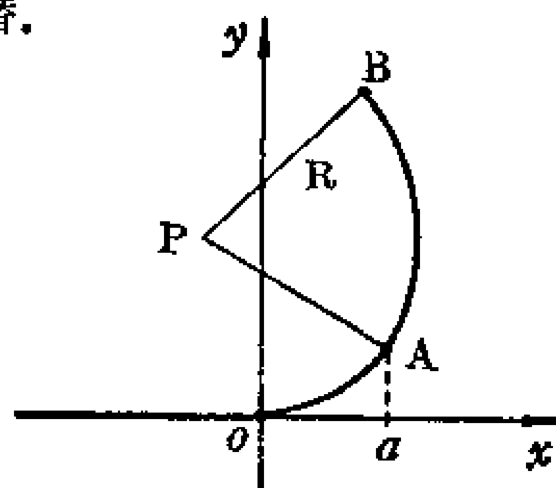


图10.20

现在来计算曲线弧段 $\overset{\frown}{OA}$ 在任一点处的曲率。因为 $y'=\frac{x^2}{2Rl}$，$y''=\frac{x}{Rl}$，由公式（10.11），所以得

$$k = \frac{\frac{x}{Rl}}{\left(1+\frac{x^4}{4R^2l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

当动点从点O连续地变到点A时，曲率从0连续地变到

$$k_A = \frac{\frac{a}{Rl}}{\left(1+\frac{a^4}{4R^2l^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

由于$\frac{l}{R}$较小，且 $a \doteq l$，因此

$$k_A = \frac{\frac{1}{R}\cdot\frac{a}{l}}{\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{R^2}\cdot\frac{a^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \doteq \frac{\frac{1}{R}}{\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{l^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \doteq \frac{1}{R}.$$

于是，曲线弧段$\overset{\frown}{OA}$起到了缓冲作用。

§ 10.3 体积及旋转体的侧面积

在这一节里我们将用定积分来计算某些特殊几何体的体积以及旋转体的侧面积。

一 已知立体截面面积求体积

如图 10.21示。某立体介于平面 $x=a$和$x=b$之间，过任一点 $x\in[a,b]$ 的平面S所截得截面$A(x)$是 x 的连续函数，试求几何体的体积。

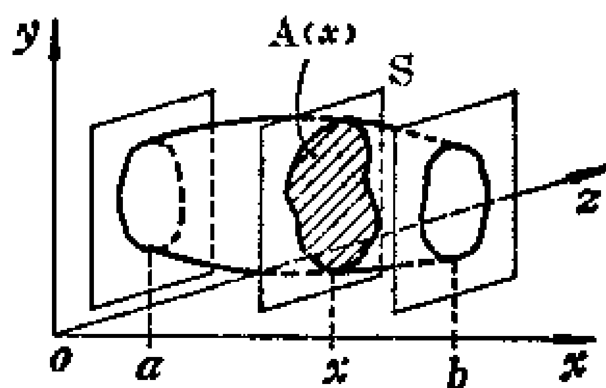


图10.21

用任给的分割T将区间

$[a,b]$分成 n个小区间 $[x_{i-1}x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，再过各分点作平面 $x=x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 将立体分成 n 个小立体；在每个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上任取一点 ξ_i，则 $A(\xi_i)\Delta x_i$ 就是小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 所对应的小立体体积的近似值；作和数

$$\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i,$$

这个和数就是对应立体体积的近似值．由于 $A(x)$在 $[a,b]$上是连续函数，因此，对任给的分割T，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，和数 $\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i$ 存在极限，并记为V，V就是立体的体积，即

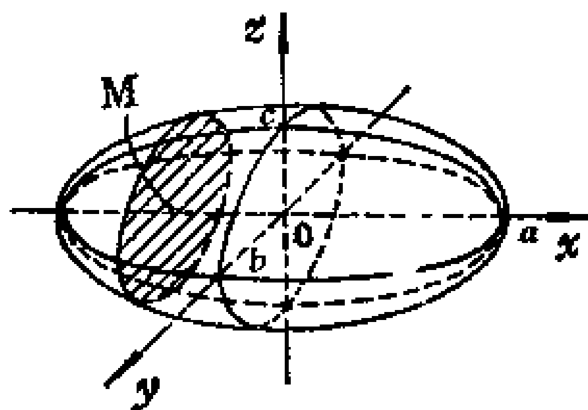
$$V=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b A(x)dx. \qquad (10.13)$$

利用公式 (10.13)易证祖暅。① 定理：夹在两个平行平面间的两个立体，被平行于这两个平面的任一平面所截，如果截得的两个截面的面积都相等，则两个立体的体积相等．

例 1　求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积．



解　如图10.22示，垂直于 x轴的平面M与x 轴交于 $x\in(-a,a)$，此平面与椭球体的截面为椭圆，且这个椭圆方程是

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

图10.22

① 祖暅（祖冲之的儿子），我国齐梁时代数学家，早在公元五世纪他就发现了这个定理．但在西方直到十七世纪才被意大利人卡瓦雪利所发现．

化为标准方程，则得

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1,$$

由§10.1的例3知，此椭圆的面积为

$$A(x)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

于是，应用公式（10.13），得椭球体的体积

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

特别地，当 $a=b=c=R$ 时，椭球体变为球体，且其体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

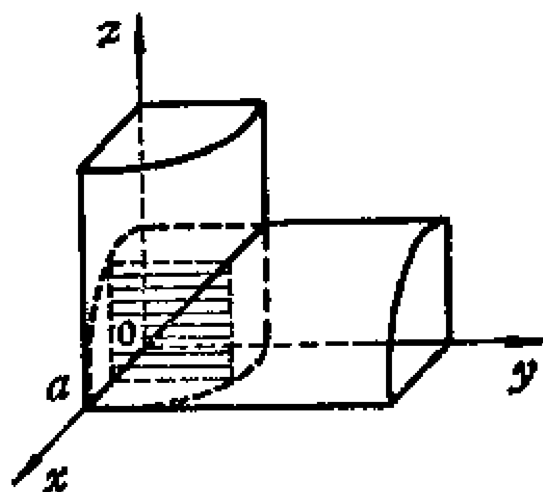


图10.23

例2 求由圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 与圆柱 $x^2+z^2=a^2$ 所围成立体的体积.

解 如图10.23示，这是所求立体的八分之一的图形. 如果取 $x=\xi$，$\xi\in[0,a]$，代入圆柱方程，则分别得

$$y=\sqrt{a^2-\xi^2},\quad z=\sqrt{a^2-\xi^2},$$

于是，这就表明用平面 $x=\xi$ 去截这个立体，所得截面是边长为$\sqrt{a^2-\xi^2}$的正方形，其截面面积 $A(x)=a^2-x^2$，应用公式（10.13），所求立体的体积为

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3.$$

二 旋转体的体积

由连续曲线 $y=f(x)$ （$f(x)\geqslant0$）与直线 $x=a$，$x=b$ （$a<$

b）以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的立体叫做旋转体，曲线 $y=f(x)$ 叫做母线。因为对任意点$x\in[a, b]$，作垂直于 x 轴的平面与旋转体的相截截面都是圆，其面积

$$A(x)=\pi y^2=\pi f^2(x),$$

由公式（10.13），旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (10.14)$$

例 3 求直线段 $y=\frac{r}{h}x$ $(0\leqslant x\leqslant h)$ 及 $x=h$绕 x 轴旋转一周所形成的锥体体积（如图10.24）。

解 应用公式（10.14）得

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\,\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi hr^2.$$

例 4 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$ 绕 x轴旋转一周所形成的环体体积。

解 如图10.25示。该环体的体积是由曲线 $y=b+\sqrt{a^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所围成的体积减去由曲线 $y=b-\sqrt{a^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所围成的体积。应用公式（10.14）得

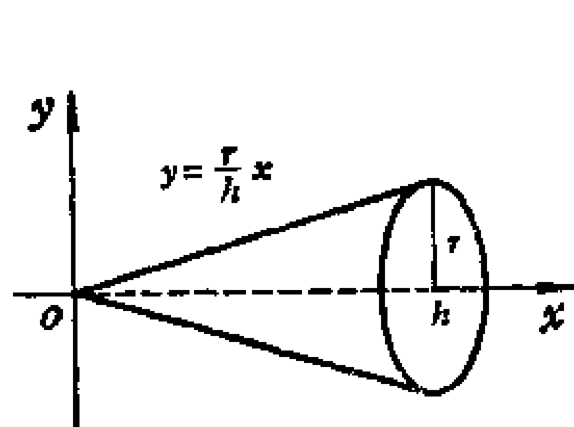


图10.24

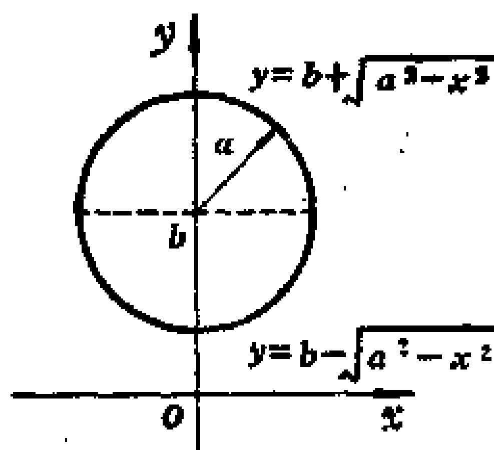


图10.25

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx$$

$$=4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4b\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$$

$$= 4b\pi\left[\frac{1}{2}a^2\arcsin 1-\frac{1}{2}a^2\arcsin(-1)\right]$$

$$= 2\pi^2 ba^2.$$

三　旋转体的侧面积

设 l是一条平面光滑曲线，其函数是

$$y=f(x),\quad x\in[a,\ b]$$

其中 $f(x)\geqslant 0$。当曲线 l绕 x轴旋转一周所形成的曲面叫做对应曲线 l 和 $x=a, x=b$ 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的侧面积（如图10.26）。

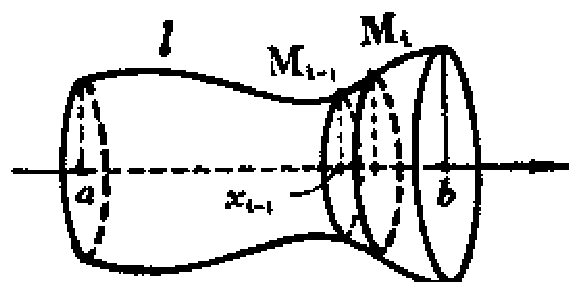


图10.26

如何计算旋转体的侧面积呢？仍用“分割—代替—作和—取极限”的方法。任给一个分割T将区间$[a, b]$分成 n 个小区间。与分点x_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$对应曲线 l 上的点$M_i(x_i, f(x_i))$ $(i=0,1,2,\cdots n)$ 将曲线 l分成 n 个小弧。连接点 M_{i-1} 和 M_i 的直线段$\overline{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 绕 x 轴旋一周得其圆锥台的侧面积

$$\Delta S_i=\pi(f(x_{i-1})+f(x_i)]\cdot\overline{M_{i-1}M_i},$$

由于$f'(x)$ 在 $[a, b]$上连续，应用拉格朗日定理，有

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

$$=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\ \ \xi_i\in(x_{i-1},\ x_i),$$

于是

$$\Delta S_i=\pi[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

作和数

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+f'^2(\bar{\xi}_i)}\Delta x_i.$$

当 $\lambda(T)\to 0$ 时，由于 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在$[a,b]$ 上连续性，得旋转体的侧面积

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.\text{①} \tag{10.15}$$

对于参数方程和极坐标方程又分别有

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ dt \tag{10.16}$$

和
$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta. \tag{10.17}$$

例 5 求半径为 R 的球的表面积.

解 对曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 应用公式 (10.15)，得球的表面积

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\ \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

$$=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2.$$

例 6 求由星形线 $x=R\cos^3t$, $y=R\sin^3t$ 绕 x 轴旋转所围成的旋转体的表面积.

解 如图 10.27示。由于曲线的对称性，及应用公式 (10.16) 则得

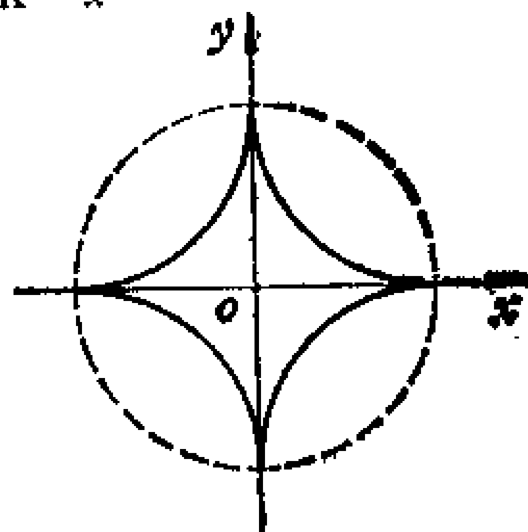


图10.27

① 证明本公式要应用$f(x)$在$[a,b]$上的一致连续性。这里从略，详见本章的几点说明。

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\text{sis}^3 t\cdot\sqrt{(3R\cos^2 t\sin t)^2+(3R\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=12\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{12}{5}\pi R^2.$$

例 7 求心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 绕极轴旋转所围成旋转体的表面积.

解 如图 10.28示. 由于曲线的对称性, 因此只考虑 $\theta\in[0,\pi]$即可. 应用公式 (10.17) , 得

$$S=2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\;d\theta$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t\;dt=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

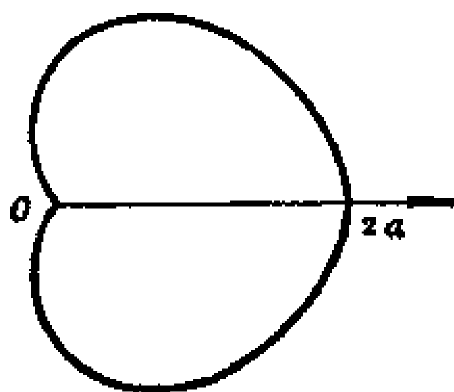


图10.28

§ 10.4 定积分在物理上的应用

我们知道平面图形的面积公式、弧长公式、旋转体的体积公式以及旋转体的侧面积公式都是用"分割—代替—作和—取极限"的方法建立的. 然而, 这种方法书写起来是繁琐的. 因此, 有必要用简便的方法将实际问题化成定积分, 这就是微元法.

一 微元法

1 基本思想

微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

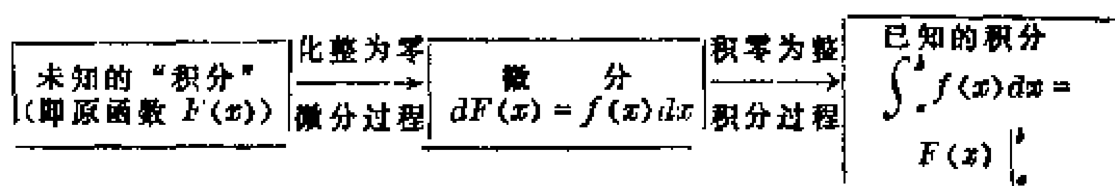
表明：求某个函数的定积分问题，实际上是求原函数 $F(x)$ 的增量. 但是，根据定理9.16知，原函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = f(x)dx,$$

将 $dF(x)$ 从 a 到 b 取积分就得到定积分

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

因此，利用已知函数 $f(x)$ 获得函数 $F(x)$ 的微分表达式是得到积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的关键. 这样一来，把“分割—代替—作和—取极限”建立函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分方法，可简化为如下两步：①利用已知函数 $f(x)$ 建立原函数 $F(x)$ 的微分表达式；②将微分表达式从 a 到 b 取积分. 且这种思想可形式的总结如下：



2 具体作法

对于任意的分割 T，为了简便，我们省略了下标号 i，用 $[x, x+\Delta x]$ 表示分割 T 中的任一小区间. 函数 $F(x)$ 在这个小区间上的增量 ΔF 近似值就是 $f(x)\Delta x$，即

$$\Delta F \doteq f(x)\Delta x,$$

且 $\Delta F - f(x)\Delta x$ 为 Δx 的高阶无穷小，于是 $f(x)\Delta x$ 就是 ΔF 的线性主部. 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据定理9.16，所以得

$$dF(x)=f(x)dx,$$

这就是 $F(x)$的微元，将所得的微元从 a到 b取积分，得

$$\int_a^b f(x)dx.$$

因此，把利用微元建立定积分的方法叫做微元法．现对微元法小结如下：

（1）使用微元法的条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$上连续；

（2）使用微元法的关键：利用已知函数 $f(x)$ 建立微元 $dF=f(x)dx$；

（3）使用微元法的要求：$\Delta F-f(x)\Delta x$ 为Δx 的高阶无穷小。

3　举例：

曲边梯形的面积

设函数 $y=f(x)$在 $[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，求曲边梯形 $aABb$ 的面积．如图10.29示，任取一点$x\in[a,b]$，且使 $x+\Delta x\in[a,b]$，在小区间 $[x,x+\Delta x]$上取面积微元

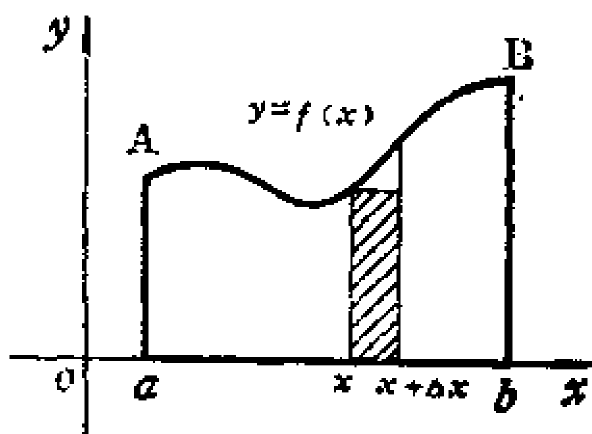


图10.29

$$dS=f(x)\cdot\Delta x,$$

亦即　$$dS=f(x)\cdot dx,$$

将面积微元 dS 从 a 到 b 积分，于是得公式（10.1）

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

曲线弧长

设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上一条光滑曲线，求曲线AB的长。如图10.30示，任取一点 $x\in[a,b]$，且使$x+\Delta x\in[a,b]$，在小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上取弧长微元，由公式（10.8）得

$$dl=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\Delta x,$$

亦即 $$dl=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

将弧长微元 dl 从 a到 b积分，于是得公式（10.7）

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

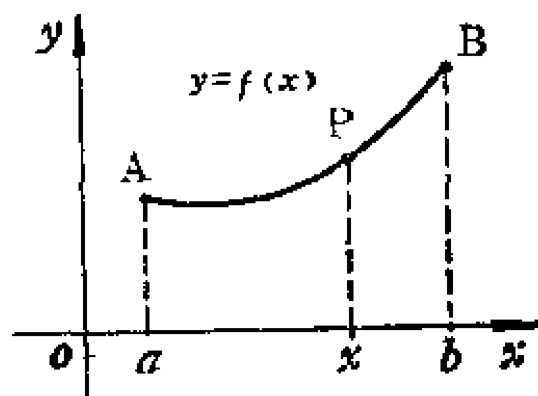


图10.30

物体运动的路程

设某物体沿直线运动，其速度 $v(t)$ 是定义在〔t_1，t_2〕上的连续函数．求该物体在这段时间内所经过的路程．任取一点$t\in$〔t_1，t_2〕，且使$t+\Delta t\in$〔t_1，t_2〕，在小区间〔$t,t+\Delta t$〕上取物体运动路程微元

$$dL=v(t)\cdot\Delta t,$$

亦即 $$dL=v(t)dt,$$

将微元dL从 t_1 到 t_2 积分，得物体从 t_1 到 t_2 这段时间内的路程．

$$L=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt.$$

二　静水侧压力

我们知道，静水中水平板上的压力F与水深 h和平板的面积S的乘积成正比，即

$$F=\rho hS,$$

其中 ρ 是水的比重，通常情况下 $\rho=1$．然而，静水中铅直平板上的侧压力，上述公式不能使用，因为水的深度不一样，平板上的侧压力随着水的深度变化而变化．所以必须寻求新的方法．

设铅直平板的形状是由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形（如图10.31）．建立坐标系，取 x 轴正向为铅直向下的，取 y轴在水平面上．水的比重$\rho=1$．

任取一点 $x\in$〔a，b〕，且使 $x+\Delta x\in$〔a，b〕，在小区间

$[x, x+\Delta x]$ 上压强可用点 x 的压强来代替，于是在小曲边梯形上的压力微元 dF 为

$$dF=\rho x f(x)\Delta x,$$

亦即

$$dF=\rho x f(x)dx,$$

将压力微元 dF 从 a 到 b 积分，则得

$$F=\rho\int_a^b xf(x)dx. \tag{10.18}$$

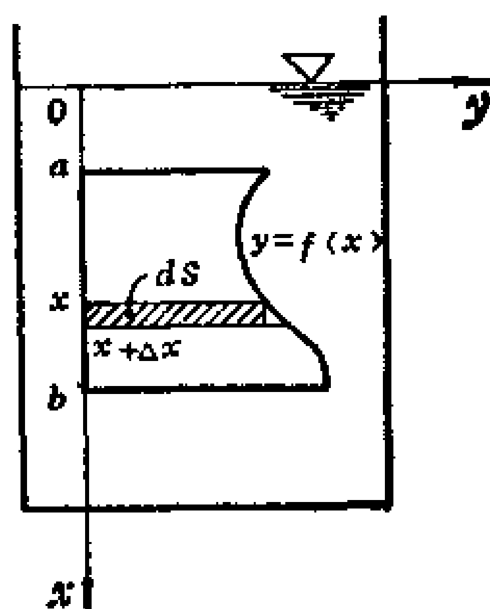


图10.31

例 1 某水库有3米×3米的泄洪闸门，位于20米深的水下，如图10.32示，求闸门承受的压力.

解 建立的坐标系如图10.32示。对应公式（10.18）中的 $f(x)=3$，当 $\rho=1$ 时，有

$$F=\int_{20}^{23}3xdx=\frac{3}{2}x^2\Big|_{20}^{23}=\frac{3}{2}(529-400)=193.5\text{吨}.$$

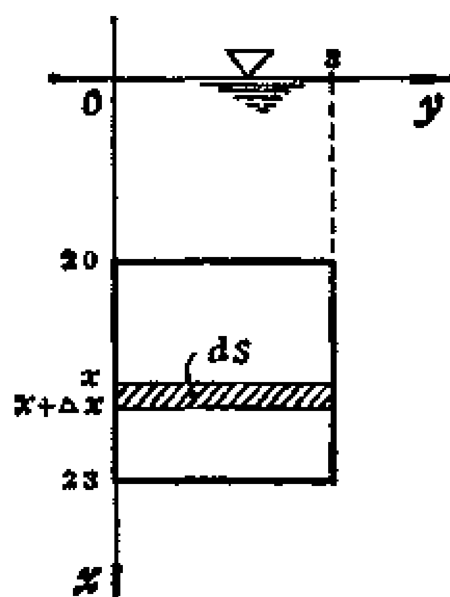


图10.32

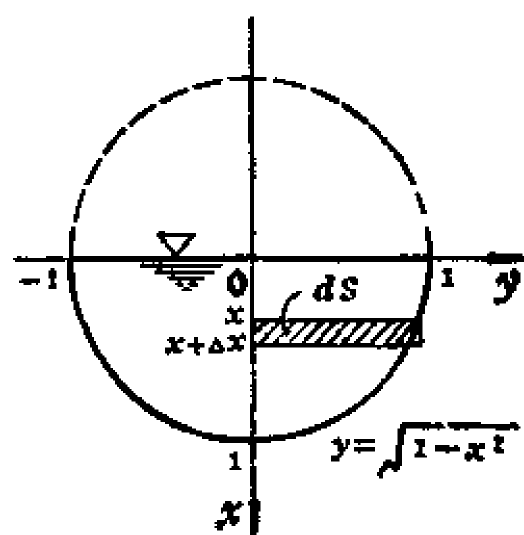


图10.33

例 2 有一水平的圆水管，直径为 2 米，管中水为半满，求水对闸门的压力.

解 建立的坐标系，如图10.33示。因为闸门关于x轴是对称的，所以只考虑$f(x)=\sqrt{1-x^2}$的一侧，当$\rho=1$时，应用公式（10.18），得

$$F=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=2\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1=\frac{2}{3}\text{吨}.$$

三 变力作功

例3 将弹簧一端固定、另一端系着一个质量可以忽略不计的小球，放在光滑面上，在平衡时对准ox轴的点0，不计空气阻力将小球向右拉到点A处，且点0至点A的距离为S，求外力克服弹性力所作的功。

解 如图10.34示。由物理学知道，在弹性范围内，弹簧的弹性力大小与弹簧的伸长（或压缩）的距离成正比，且其方向始终指向平衡位置，即

$$F=-kx,$$

其中的k是比例系数，负号表示小球的运动方向与弹性力F的方向相反。

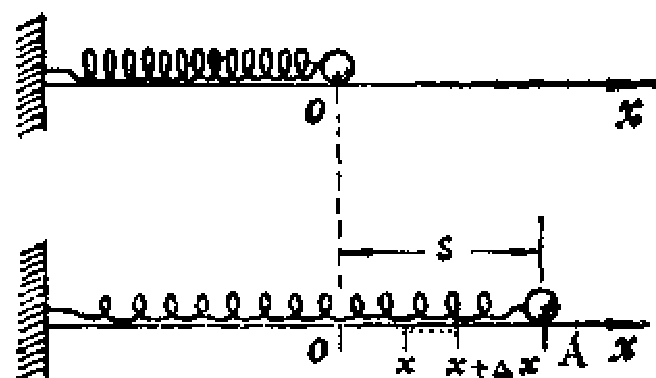


图10.34

任取一点$x\in[0,S]$，且$x+\Delta x\in[0,S]$，当小球在外力f的作用下通过小区间$[x,x+\Delta x]$时，外力f在这段路程内是点x的函数，但仍然用

$$f=kx\ （因为f=-F）$$

来表示。于是，在这段路程内外力f所作的功的微元为

$$dw=f\cdot\Delta x=kx\cdot\Delta x,$$

亦即 $\quad dw=kxdx,$

从0到S积分，得

$$w=\int_0^S kx\,dx=k\frac{1}{2}x^2\Big|_0^S=\frac{1}{2}kS^2.$$

例 4　某空气压缩机，其活塞的面积为 S，在等温压缩过程中，活塞从 x_1 处压缩到 x_2 处，求压缩机在这段压缩过程中所消耗的功。

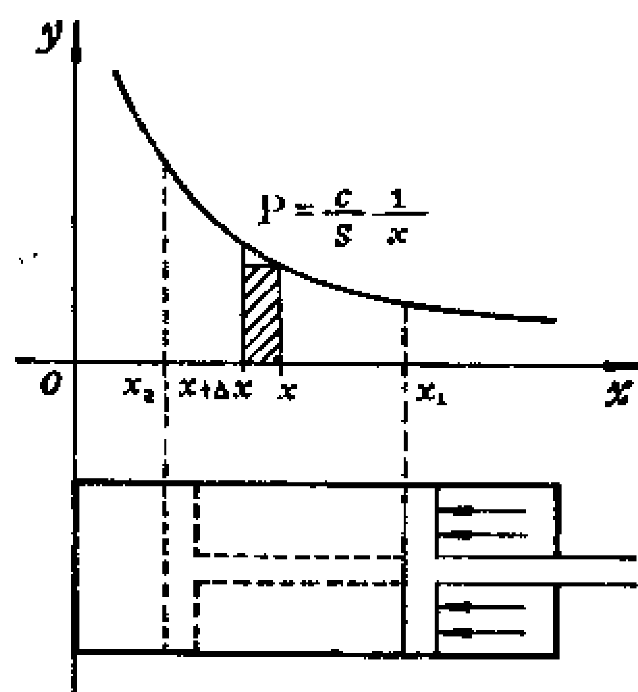


图10.35

解　如图10.35示。由物理学知道，在理想的气体中压强 P 与体积 V 的乘积等于常数，即

$$P\cdot V=c,$$

而且可将 V 换成活塞的面积 S 与活塞运动到点 x 之积，于是有

$$P=\frac{c}{S}\cdot\frac{1}{x}.$$

因此 P 是 x 的函数，即P是变压强，在 $[x+\Delta x,\ x]$ 内活塞所消耗的功的微元为

$$dw=-\left(\frac{c}{S}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot S\cdot\Delta x\quad(\Delta x<0)$$

$$=-\frac{c}{x}\Delta x,$$

亦即

$$dw = -\frac{c}{x}dx,$$

故活塞从x_1到x_2所消耗的功为

$$w = -\int_{x1}^{x2} c\frac{1}{x}dx = c\int_{x2}^{x1}\frac{1}{x}dx$$

$$= c\ln\frac{x_1}{x_2}.$$

四　物体的重心

由物理学知道，一个质量为 m的质点，它到一条已知直线的距离为 d，则把 md 叫做该质点对已知直线的**静力矩**。

如果平面内有质量分别为 m_1，m_2，…，m_n 的 n 个质点，它们的坐标分别是 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，则把

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ 和 } M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

分别叫做**质点组对 x 轴和 y 轴的静力矩**。

如果存在一点 (x_0,y_0)，在该点使质点组的质量 $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ 对各坐标轴的静力矩等于质点组对同一坐标轴的静力矩，则称点 (x_0, y_0) 为质点组的**重心**，即

$$x_0 M = M_y \text{ 和 } y_0 M = M_x,$$

于是得

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{和} \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

我们进一步讨论质量均匀分布的平面图形的重心问题。对特殊形状的几何图形，借助于几何方法不难确定它们的重心。这里给出计算一般形状的平面图形的重心。设质量均匀分布的

曲边梯形 $aABb$ （如图10.36）是由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成．由于质量分布是均匀的，因此其**面密度** ρ（单位面积上的质量）是个常数．任取一点 $x\in[a,b]$，且使 $x+\Delta x\in[a,b]$，在小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的面积微元为 $ds=f(x)\cdot\Delta x$，于是，在 ds 上的质量为

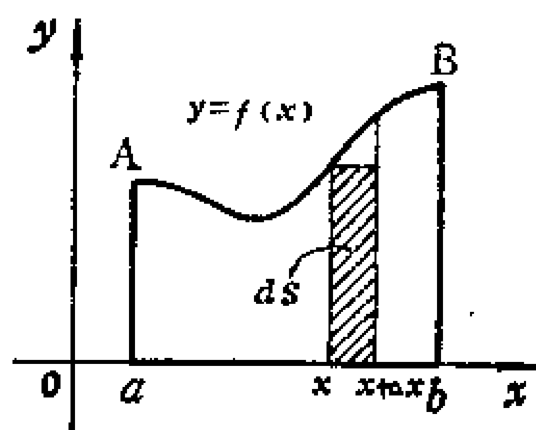


图10.36

$$dM=\rho\cdot ds=\rho f(x)\Delta x$$

亦即

$$dM=\rho f(x)dx.$$

故 dM对 y轴和 x轴的静力矩微元分别是

$$dM_y=\rho xf(x)dx$$

和
$$dM_x=\rho\frac{1}{2}y\cdot f(x)dx=\frac{\rho}{2}f^2(x)dx.$$

将微元 dM_y 和 dM_x 分别从 a 到 b 积分，得到质量均匀分布的曲边梯形对 y轴和 x轴的静力矩分别是

$$M_y=\rho\int_a^b xf(x)dx \quad 和 \quad M_x=\frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)dx.$$

又因为曲边梯形的质量为

$$M=\rho\cdot\int_a^b f(x)bx,$$

所以质量均匀分布的曲边梯形 $aABb$ 的重心坐标是

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},$$

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}. \qquad (10.19)$$

在建立（10.19）的过程中，不难发现，质量均匀分布的平面图形的静力矩和重心与面密度 ρ 成正比，而重心坐标与面密度 ρ 无关，可看成 $\rho=1$。

例 5 如图 10.37示，在火车主动轮连杆轴节 A 的对面多铸一块弓形，目的是为了达到静力平衡，使火车在高速运转时比较稳定。

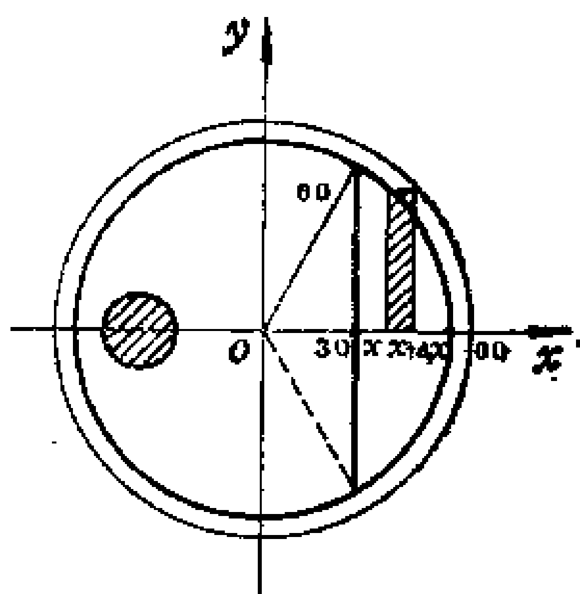


图10.37

已知弓形的张角为120°，半径为60厘米，铸钢板的面密度为 ρ，求弓形的重心。

解 我们的目的是求弓形的重心，与厚度无关，因此，只按平面弓形的情形考虑就可以了。另外，由于弓形是对称的，其重心一定在 ox 轴上，因此只须利用公式（10.19）求 x 即可。又因为弓形的张角为 120°，所以点 a 的坐标为（30，0）。综上所述，我们只在区间〔30，60〕上考虑函数 $(x)=\sqrt{60^2-x^2}$ 就可以了。

在公式（10.19）中，分别求

$$M_y=2\int_{30}^{60}\rho\cdot xf(x)dx=2\rho\int_{30}^{60}x\sqrt{60^2-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}\rho(60^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{30}^{60}$$

$$\doteq\frac{2}{3}\rho(52)^3;$$

$$M=2\rho\int_{30}^{60}\sqrt{60^2-x^2}\,dx$$

$$=2\rho\cdot60^2\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=60^2\rho\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

于是得

$$x_0=\frac{N_y}{M}\doteq\frac{\frac{2}{3}\rho(52)^3}{90\rho\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\doteq 40\ 厘米.$$

§ 10.5 平均值

在生产实践中，常常需要计算算术平均值，因为利用算术平均值可以对若干同类现象进行比较和研究，例如，在某校80届入学的20个班的同学中，研究各班学生的平均年龄，是以各班为单位，求其各班学生的平均年龄，再进行比较．同时利用算术平均值还可以研究某种数值的平均水平，说明总体的发展过程和趋势．例如，下表给出我国粮食产量按人口平均发展变化的趋势：

年　　度	1949	1953	1957	1978	1979
总产量（亿斤）	2264	3337	3901	6095	6642
人均量（斤）	418	568	603	636	684

然而，这些数据的获得，表现在数学上是这样的：在某一过程中进行n次测量所获得的数值为 y_1，y_2，…，y_n，而

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

就是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的算术平均值．

在研究实际问题时，只知道计算 n 个数值的算术平均值是不够的，有时也需要研究某个函数 $y=f(x)$ 在某个区间$[a,b]$上的算术平均值，例如，在电学里常常需要计算平均电流，平均电压和平均功率等等．

现在来研究如何求在区间 $[a,b]$上的连续函数 $y=f(x)$ 的

算术平均值问题。用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

将区间$[a,b]$分成 n 等分，其每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$长度为$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$。而函数$f(x)$在各分点的函数值记为 $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，自然可用

$$A_n=\frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \qquad (1)$$

近似地表达函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的算术平均值。当$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$比较小（即 n比较大）时，函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的算术平均值 A_n 的近似程度就好，为此，我们把极限

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

称为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的**算术平均值**，简称**平均值**。下面将进一步给出平均值的积分表达式。

因为 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是一个与 i 无关的常数，所以对（1）式可变形如下

$$A_n=\frac{1}{n+1}f(x_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$=\frac{1}{n+1}f(x_0)+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{1}{n+1}f(x_0)+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

由于函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，因此 $f(x)$在$[a,b]$上有界，

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}f(x_0)=0.$$

于是有

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (10.20)$$

因为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以公式（10.20）与公式（9.11）是一致的，其中的平均值 $\bar{y}=f(c)$，$c\in[a,\ b]$。其公式（10.20）的几何意义如图9.6示。

例1 求函数 $f(x)=e^x$ 在区间$[-1,1]$上的平均值。

解 由公式（10.20），得

$$\bar{y}=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}e^x dx=\frac{1}{2}e^x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(e-e^{-1}).$$

不难发现，$\frac{1}{2}(e-e^{-1})=shx\,|_{x=1}$，故由双曲函数表查得

$$\bar{y}\doteq 1.752.$$

例2 一定质量的理想气体，在等温过程中，其体积从 V_a 膨胀到 V_b，在此过程中，求气体压强的平均值。

解 由物理学知，气体的压强就是气体对容器壁单位面积上的作用力，且此力的方向与器壁垂直；另外，在温度不变的情况下，一定量的理想气体体积膨胀时，它的压强随着变小，体积V和压强P之间的关系为

$$PV=c\ (c\ 是常数),$$

亦即 $$P=\frac{c}{V}.$$

由公式（10.20），得

$$\overline{P} = \frac{1}{V_b - V_a}\int_{V_a}^{V_b} \frac{c}{V}\,dV = \frac{c}{V_b - V_a}\, lnV \Big|_{V_a}^{V_b}$$

$$= \frac{c}{V_b - V_a}(lnV_b - lnV_a) = \frac{c}{V_b - V_a}\, ln\frac{V_b}{V_a}.$$

例 3 经过半波整流的交流电压 $u(t)$ 由

$$u(t) = \begin{cases} U_m \sin\omega t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} < t \leqslant T, \end{cases}$$

给出，求在一个周期 T 内 $u(t)$ 的平均值。

解 当 $t \in \left(\frac{T}{2},\ T\right]$ 时，由于 $u(t) = 0$，因此在应用公式(10.20) 时，有

$$\bar{u} = \frac{1}{T - 0}\int_0^T u(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin\omega t\,dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} 0\,dt$$

$$= \frac{U_m}{T}\cdot\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{T_m}{T}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right)\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$= \frac{2U_m}{\omega T} = \frac{U_m}{\pi}.$$

我们知道，直流电流 I 通过电阻 R 时，消耗在电阻 R 上的功率是

$$P = I^2 R,$$

而且在时间 T 内消耗在电阻 R 上的功为

$$W = P \cdot T = I^2 RT.$$

但是，当交流电流 $i(t)$ 通过电阻 R 时，消耗在 R 上的功率为

$$P(t) = i^2(t) \cdot R,$$

即功率是时间t的函数．当计算在时间T内消耗在电阻R上的功时，用平均功率$\overline{P}$和时间T的乘积来表示，即

$$\overline{W}=\overline{P}\cdot T.$$

那么，怎样计算平均功率$\overline{P}$呢？

如果交流电流$i(t)$的周期是T，则将功率$P(t)$在区间$[0,T]$上的平均值叫做**平均功率**，且由

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt$$

给出．

例 4 求交流电流$i(t)=I_m\sin\omega t$在其周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$消耗在电阻R上的平均功率．

解 代入上面的积分，得

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2R\sin^2\omega tdt$$

$$=\frac{I_m^2R\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega tdt$$

$$=\frac{I_m^2R\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{1-\cos2\omega t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{I_m^2R\omega}{4\pi}\left(t-\frac{\sin2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{I_m^2R}{2}.$$

学习指导

一 内容概要

1 重点及要求

本章虽然没有重要的概念和定理，但是，却突出了定积分的应用．因此，本章从几何和物理两个方面的问题建立了一些公式．掌握这些公式的建立方法和有重点的熟记某些公式，是利用定积分解决实际问题的基础．象公式（10.2），（10.3），（10.5），（10.6）；（10.7），（10.8），（10.11），（10.12）；（10.14），（10.15）；（10.18），（10.19），（10.20）都是基本的和重要的．

微元法是在“分割——代替——作和——取极限”基础上归纳总结出的简便易行的方法．为此，一定要掌握好微元法，并根据不同的问题能运用微元法，上面关于几何中的公式皆可用微元法建立．因此说，掌握好微元法比死记硬背这些公式更有意义．尤其是对物理和力学问题，微元法更有其方便之处．

2 对本章各节公式的总结

平面图形的面积

问　题	公　式	公式号
$f_1(x)$和$f_2(x)$在$[a,b]$上连续，且$f_1(x)\leqslant f_2(x)$	$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$	(10.3)
$\varphi_1(y)$和$\varphi_2(y)$在$[c,d]$上连续，且$\varphi_1(y)\leqslant\varphi_2(y)$	$S=\int_c^d[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]dy$	(10.4)
$f(x)$在$[a,b]$上连续，且取消非负的限制	$S=\int_a^b\lvert f(x)\rvert dx$	(10.2)
曲线由参数方程给出	$S=\int_\alpha^\beta\lvert\psi(t)\rvert\varphi'(t)dt$	(10.5)
曲线由极坐标方程给出	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta$	(10.6)

平面曲线弧长及曲率

问　　题	公　　式	公式号
曲线弧长	$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	(10.7)
弧微分	$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$	(10.8)
曲线由参数方程给出	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	(10.9)
曲线由极坐标方程给出	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$	(10.10)
平面曲线的曲率	$k=\dfrac{\lvert y''\rvert}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$	(10.11)
曲率半径	$\rho=\dfrac{1}{k}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\lvert y''\rvert}$	
曲率中心	$\xi=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}$ $\eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}$	(10.12)

体积及旋转体的侧面积

已知立体截面面积	$V=\int_a^b A(x)\,dx$	(10.13)
求旋转体的体积	$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$	(10.14)
曲线由 $y=f(x)$ 给出	$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	(10.15)
曲线由参数方程给出	$S=2\pi\int_\beta^\alpha\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	(10.16)
曲线由极坐标方程给出	$S=2\pi\int_\beta^\alpha\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$	(10.17)

定积分在物理上的应用

定积分在物理上的应用是很多的，本书在正文中仅给出了侧压力、变力作功和物体重心等问题.

问题	公式	公式号
静水侧压力	$F=\rho\int_a^b xf(x)dx$	(10.18)
变力作功	参考例3和例4	
物体的重心	$x_0=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$ $y_0=\dfrac{M}{M}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)bx}$	(10.19)

象摩擦力矩、转动惯量和流量等问题将放到本章的例题选讲中.

二　几点说明

1　公式（10.15）的证明过程

在§10.3的第三段里，我们已经给出和数

$$\sum_{i=1}^{n}\varDelta S_i=\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\varDelta x_i,$$

其中 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$. 现将和数变形如下.

$$\sum_{i=1}^{n}\varDelta Si=\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\varDelta x_i$$

$$+\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)-2f(\xi_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\varDelta x_i.$$

不难看出，由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，因此，当 $\lambda(T)\to0$ 时，上面右端第一个和式的极限存在，且就是

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

而上面右端第二个和式，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，可以证明它是趋向于0的。

事实上，因为函数 $f(x)$在〔a,b〕上连续，根据康托定理知，函数 $f(x)$在〔a,b〕上一致连续，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $x_1,x_2\in$〔a,b〕，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

由此可知，对上述的 ε，只要分割T分得充分细，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$|f(x_{i-1})+f(x_i)-2f(\xi_i)|<2\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)-2f(\xi_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}2\varepsilon\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

$$=2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\leqslant 2\varepsilon\cdot l,$$

其中 l 是曲线段的长，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$ 是曲线弧内接折线的长，当然不超过l。即第二个和式趋向于0（当$\lambda(T)\to 0$时）。

2　再说微元法

在§10.4 的第一段里，我们特别强调了，所谓的微元，就是函数 $F(x)$的增量 ΔF 的线性主部，在函数 $f(x)$ 连续的条件下，这个线性主部就是$F(x)$ 的微分，且有

$$dF(x)=f(x)dx,$$

与此同时，$\Delta F-f(x)\Delta x$为Δx的高阶无穷小。

我们在此指出，当满足这一要求时，建立微元的方法是不唯一的。例如，求半径为R（$R=a$）的圆的面积。

如图10.38示。因为圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2,$$

所以在第一象限取微元，不难看出其面积微元是

$$dS=\sqrt{R^2-x^2}\,dx,$$

于是，半径为R的圆的面积为

$$S=4\int_0^a\sqrt{R^2-x^2}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\cdot\cos^2t\,dt$$

$$=4\cdot\frac{R^2}{2}\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2.$$

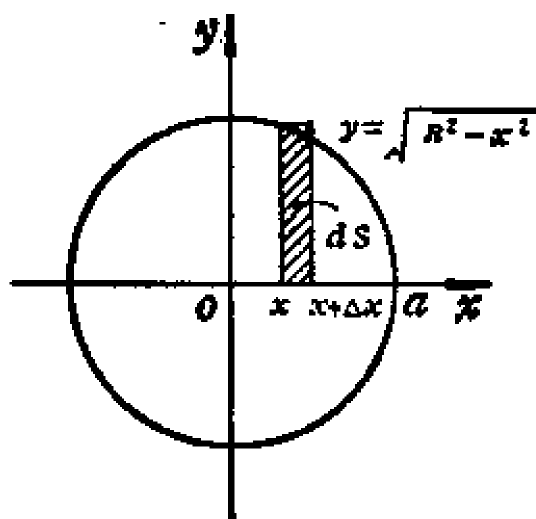


图10.38

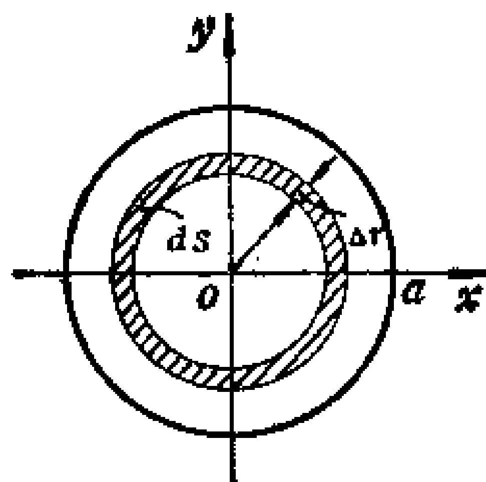


图10.39

如图 10.39示。可以认为圆的面积是无穷多个小圆环积累而成，把r看成变量，不难看出其微元是

$$dS=2\pi r\cdot dr,$$

于是，半径为R的圆的面积为

$$S=\int_0^R2\pi r\,dr=\frac{1}{2}2\pi r^2\Big|_0^R=\pi R^2.$$

三　例题选讲

例 1　求由曲线 $y^2=2px$（$p>0$）和$27py^2=8(x-p)^3$ 所围成的平面图形的面积。

基本思路　利用公式(10.4)作较为方便。

解　因为 $y^2=2px$ 是顶点在坐标原点开口向右的抛物线，而曲线 $27py^2=8(x-p)^3$ 可变为

$$y=\pm\sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}},$$

其顶点在 $x=p$ 处，以 x轴为对称轴的$\frac{3}{2}$次方抛物线，所以两条曲线所围成的平面图形如图10.40示。

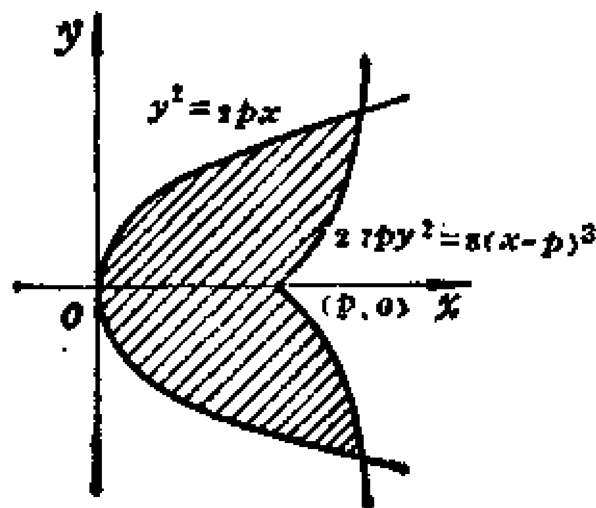


图10.40

为了应用公式(10.4)，必须求出二曲线的交点。将 $y^2=2px$代入第二个曲线 $27py^2=8(x-p)^3$，有

$$27p\cdot2px=8(x-p)^3,$$

从中解得 $x=4p$，而 $y=\pm2\sqrt{2}p$。又因为图形关于 x 轴是对称的，于是有

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\ p^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{y^2}{2p}\right]dy$$

$$=2\left[2\sqrt{2}p^2+\frac{3}{2}\ p^{\frac{1}{3}}\frac{3}{5}\ y^{\frac{5}{3}}\ \Big|_0^{2\sqrt{2}p}\right.$$

$$\left.-\frac{y^3}{6p}\Big|_0^{2\sqrt{2}p}\right]=\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2.$$

例 2　求由曲线：$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant2\pi)$ 及直线 $x=a$（当 $y\leqslant0$ 时）所围成的面积。

基本思路　将闭曲线所围成的面积 S 分成三角形面积 S_1 与半径为 a的渐伸线所围成的面积 S_2 之和。

解　如图10.41示。所求的面积是指由闭曲线 $ABCA$所围成的面积。连接 OC，于是将$ABCA$ 所围成的面积分成$\triangle OAC$的面积 S_1 与 $OABCO$ 所围成的面积 S_2 之和。

由于曲线 ABC 是半径为 a 的圆的渐开线，因此 $\overline{AC}=2\pi a$，从而得

$$S_1=\frac{1}{2}a\cdot 2\pi a=\pi a^2.$$

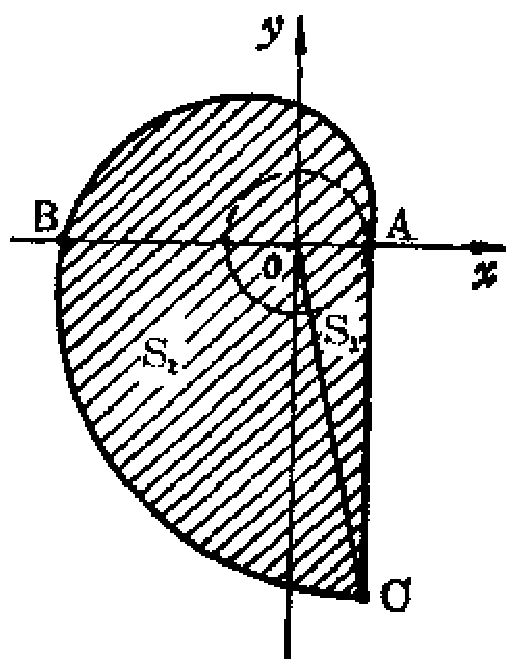


图10.41

如果将曲线 ABC 看成极坐标方程 $r=r(\varphi)$，且点C的极坐标为 (r_1,φ_1)，根据公式(10.6)，有

$$S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1}r^2(t)dt.$$

可是，由曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ 可得

$$r^2=x^2+y^2=a^2(1+t^2);$$

又因为 $\mathrm{tg}t=\frac{y}{x}=\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}$，微分得

$$\sec^2 t dt=\frac{(\cos t+t\sin t)t\sin t-(\sin t-t\cos t)t\cos t}{(\cos t+t\sin t)^2}dt,$$

所以解得

$$dt=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 t}\cdot\frac{t^2}{(\cos t+t\sin t)^2}dt=\frac{t^2}{1+t^2}dt.$$

在此基础上将 r^2 和 dt 代入 S_2 里，得

$$S_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\cdot\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

于是，得

$$S=\pi a^2\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

例 3 求由极坐标方程 $r=a\cos\varphi$，$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ 所

表曲线围成的面积 S，且点 $M(\frac{a}{2},0)\in S$。

基本思路 利用公式（10.6），为此分析极坐标方程作出图形，给出积分限。

解 我们知道，在直角坐标系中，极坐标方程 $r=a\cos\varphi$ 是以点 $M\left(\frac{a}{2},0\right)$为中心，以$\frac{a}{2}$为半径的圆，且角 φ的变化范围是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$；而极坐标方程$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)=\frac{2a}{\sqrt{2}}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$是以点$M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{4}\right)$为中心，以$\frac{a}{\sqrt{2}}$为半径的圆，且角 φ 的变化范围是$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$，如图10.42示。

于是，应用公式(10.6)得

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2d\varphi+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1+\sin2\varphi)d\varphi+\frac{\pi a^2}{8}$$

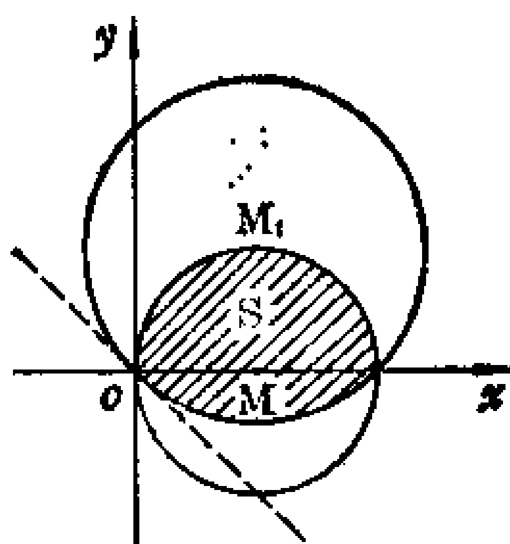


图10.42

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\right]+\frac{\pi a^2}{8}=\frac{a^2}{4}(\pi-1)。$$

例 4 证明：如果曲线由参数方程

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

给出，则在曲线上任一点的曲率公式为

$$k=\frac{|\psi''\varphi'-\varphi''\psi'|}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

基本思路 利用曲率的定义和弧微分公式。

证明 由曲率的定义知

$$k=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=\frac{d\varphi}{dl},\qquad (1)$$

其中 dl 可由弧微分公式

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

给出，下面只须求出 $d\varphi$ 即可。

因为

$$\mathrm{tg}\varphi=y'_x=\frac{\psi'}{\varphi'},$$

所以 $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\psi'}{\varphi'}$，同时又可求得

$$d\varphi=\frac{1}{1+\frac{\psi'^2}{\varphi'^2}}\cdot\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)'\cdot dt$$

$$=\frac{\varphi'^2}{\varphi'^2+\psi'^2}\cdot\frac{|\psi''\varphi'-\varphi''\psi'|}{\varphi'^2}\;dt.$$

于是，代入（1）式得

$$k=\frac{d\varphi}{dl}=\frac{|\psi''\varphi'-\varphi''\psi'|}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地，如果曲线由椭圆方程

$$x=\varphi(t)=a\cos t,\quad y=\psi(t)=b\sin t$$

给出，则曲线上任一点的曲率为

$$k=\frac{|ab\sin^2t+ab\cos^2t|}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 5 证明：如果曲线是由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta)$$

给出，则在曲线上任一点的曲率由公式

$$k=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

给出。

基本思路 利用曲率的定义和弧微分公式。

证明 由曲率的定义知

$$K=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (2)$$

当令 $x=\rho\cdot\cos\theta$，$y=\rho\cdot\sin\theta$ 时，其中的 dl 可由弧微分公式

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$$

给出，下面只须求出 $d\varphi$ 即可。

因为

$$tg\varphi=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta},$$

所以 $\varphi=\text{arctg}\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}$，同时又可求得

$$d\varphi=\frac{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos)^2}.$$

$$\frac{|(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)'(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)-(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)'(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)|}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2}\cdot d\theta$$

$$=\frac{|\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta+2\rho'^2\sin^2\theta+2\rho'^2\text{cis}^2\theta-\rho''\rho\sin^2\theta-\rho''\rho\cos^2\theta|}{\rho'^2\sin^2\theta+\rho'^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\cdot\rho''|}{\rho'^2+\rho^2}d\theta.$$

于是，代入（2）式得

$$k=\frac{d\varphi}{dl}=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地，如果曲线由极坐标方程

$$\rho=a(1+\cos\theta)\ (\text{心脏线})$$

给出，则在曲线上任一点的曲率由公式

$$k=\frac{|a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)\cos\theta|}{[a^2(1+\cos\theta)^2+a\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4a}(1+\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

例6 设某立体之垂直于 ox 轴的横截面的面积

$$S(x)=Ax^2+Bx+C\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中 A、B，C为常数．证明该立体的体积等于

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4_1S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

其中 $H=b-a$（辛卜生①公式）

基本思路 将立体平移，使$\frac{a+b}{2}=0$，但体积不变；然后应用公式（10.13）．

证明 先将立体平移至平面 $x=-\frac{H}{2}$及 $x=\frac{H}{2}$之间，此时 $a=-\frac{H}{2}$，$b=\frac{H}{2}$，$\frac{a+b}{2}=0$．再应用公式(10.13)得

$$V=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}(Ax^2+Bx+C)\,dx=2\int_0^{\frac{H}{2}}(Ax^2+C)dx$$

$$=\frac{2A}{3}\left(\frac{H}{2}\right)^3+2C\left(\frac{H}{2}\right).$$

另外，由于

---

① 辛卜生：Simpson，T.英国数学家，1710—1761年．

$$S\left(\frac{H}{2}\right)=A\left(\frac{H}{2}\right)^2+B\left(\frac{H}{2}\right)+C,$$

$$S\left(-\frac{H}{2}\right)=A\left(\frac{H}{2}\right)^2-B\left(\frac{H}{2}\right)+C,$$

和 $$S(o)=S\left(\frac{a+b}{2}\right)=C,$$

因此得

$$\begin{aligned}V&=\frac{2A}{3}\left(\frac{H}{2}\right)^3+2C\left(\frac{H}{2}\right)\\&=\frac{H}{6}\left(\frac{AH^2}{2}+6C\right)\\&=\frac{H}{6}\Big[A\left(\frac{H}{2}\right)^2+B\left(\frac{H}{2}\right)+C+4C\\&\qquad+A\left(\frac{H}{2}\right)^2-B\left(\frac{H}{2}\right)+C\Big]\\&=\frac{H}{6}\left[S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(a)\right].\end{aligned}$$

然后，再将立体平移到原位，且其体积不变，故得

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right].$$

特别地，利用辛卜生公式，求由柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和平面 $z=\frac{c}{a}x$，$z=0$ 所围成的体积（取 $x>0$ 的部分）

如图 10.43示，用$y=$常数的平面去截立体，得$\triangle ABD$，且不难求得其截面面积为

$$S(y)=\frac{1}{2}AB\cdot BD$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot z$$

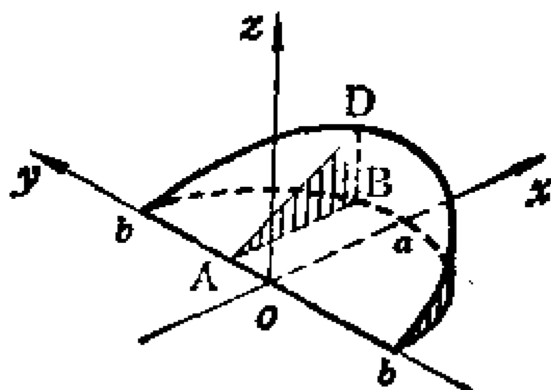


图10.43

$$=\frac{1}{2}\ \frac{c}{a}x^2=\frac{ac}{2b^2}(b^2-y^2).$$

不难求得

$$S(-b)=0,\ S(b)=0,$$

$$S\left(\frac{b-b}{2}\right)=S(0)=\frac{ac}{2},$$

代入辛卜生公式得

$$V=\frac{2b}{6}\cdot 4\cdot\frac{ac}{2}=\frac{2}{3}abc.$$

例 7 证明：将曲边梯形

$$a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)$$

（其中 $f(x)$ 为连续函数）绕 oy 轴旋转一周所形成的旋转体的体积等于

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx \tag{10.21}$$

基本思路 利用微元法建立旋转体的体积微元，然后积分.

证明 如图 10.44 示. 在 $[a,b]$ 内任取一点 x，且使 $x+\Delta x\in[a,b]$. 不难看出小曲边梯形绕 oy 旋转一周所得旋转体的体积微元

$$dV=2\pi x\cdot f(x)\,dx.$$

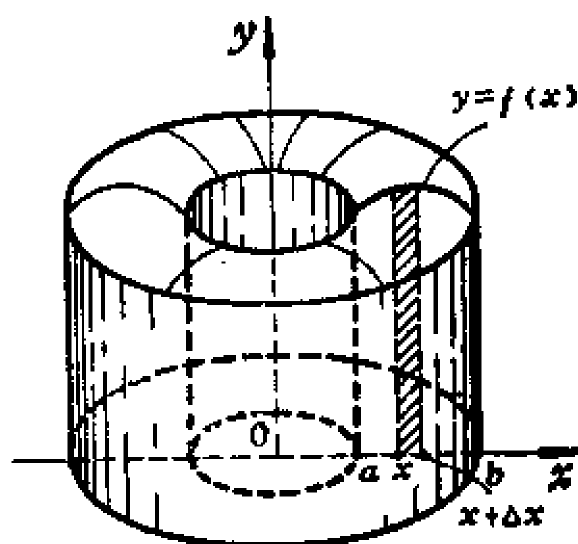


图10.44

将 dV 从 a 到 b 积分，得

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

特别地，由曲线

$$y=x^2,\ 及\ x=1,\ y=0$$

围成的面积绕 oy 轴旋转一周所形成的旋转体的体积，应用公式(10.21)得

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot x^2dx=\frac{1}{2}\pi x^4\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

例 8 证明：把平面图形

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$$

（其中 φ, r 为极坐标）绕极轴旋转一周所形成的体积等于

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi. \qquad (10.22)$$

基本思路 利用两边夹定理建立旋转体的体积微元，然后积分.

证明 如图10.45(a)示，我们首先求圆扇形

$$0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$$

（其中 $\varphi_0\in[\alpha,\beta]$ 的任意给定角，而 $a=r(\varphi_0)$）绕极轴旋转一周所形成的旋转体体积 V_1，当变换到直角坐标系后，得

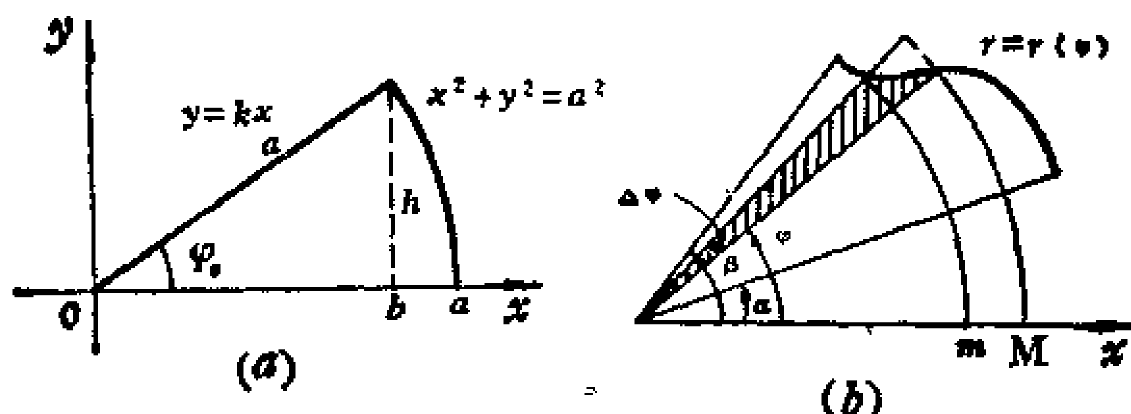


图10.45

$$V_1=\pi\int_0^b k^2x^2dx+\pi\int_b^a(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi k^2\cdot\frac{b^3}{3}+\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_b^a$$

$$=\frac{\pi bh^2}{3}+\pi\left[\frac{2a^3}{3}-a^2b+\frac{b^3}{3}\right]$$

$$=\frac{2\pi a^2(a-b)}{3}=\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\varphi_0). \qquad (3)$$

如图 10.45(b) 示. 设 $r=r(\varphi)$ 在区间 $[\varphi,\varphi+\Delta\varphi]$ 上的最大值和最小值分别用M 和m 表示，那么图中阴影部分的面

积绕极轴旋转一周所形成的体积ΔV应介于两个园扇形

$$0\leqslant r\leqslant m,\ [\varphi,\varphi+\Delta\varphi]\ 与\ 0\leqslant r\leqslant M,\ [\varphi,\varphi+\Delta\varphi]$$

绕极轴旋转一周所形成的体积之间。对应角度 $\varphi+\Delta\varphi$与 φ 参考公式(3)，则得

$$\frac{2\pi m^3}{3}\left\{[1-\cos(\varphi+\Delta\varphi)]-(1-\cos\varphi)\right\}\leqslant \Delta V\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\pi M^3}{3}\left\{[1-\cos(\varphi+\Delta\varphi)]-(1-\cos\varphi)\right\},$$

即
$$\frac{2\pi m^3}{3}[\cos\varphi-\cos(\varphi+\Delta\varphi)]\leqslant\Delta V$$

$$\leqslant\frac{2\pi M^3}{3}[\cos\varphi-\cos(\varphi+\Delta\varphi)].$$

将上面的不等式各端用 $\Delta\varphi$除，当 $\Delta\varphi\to0$ 时，注意到 $\lim\limits_{\Delta\varphi\to0}m=\lim\limits_{\Delta\varphi\to0}M=r(\varphi)$，以及

$$\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\cos\varphi-\cos(\varphi+\Delta\varphi)}{\Delta\varphi}$$

$$=\lim_{\Delta\varphi\to0}-\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}=\sin\varphi,$$

于是得

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{2\pi}{3}\ r^3\sin\varphi,$$

亦即（体积微元）

$$dV=\frac{2\pi}{3}\ r^3\sin\varphi d\varphi,$$

故

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

特别地，求心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 绕极轴旋转一周所形成的体积，利用公式（10.22），得

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{2\pi a^3}{3}\ \frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

例 9　求抛物线 $y^2=2px$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$：（1）绕 ox 轴；（2）绕 oy 轴旋转一周所形成的曲面面积

基本思路　利用公式（10.15）。

解　（1）利用公式(10.15)，得

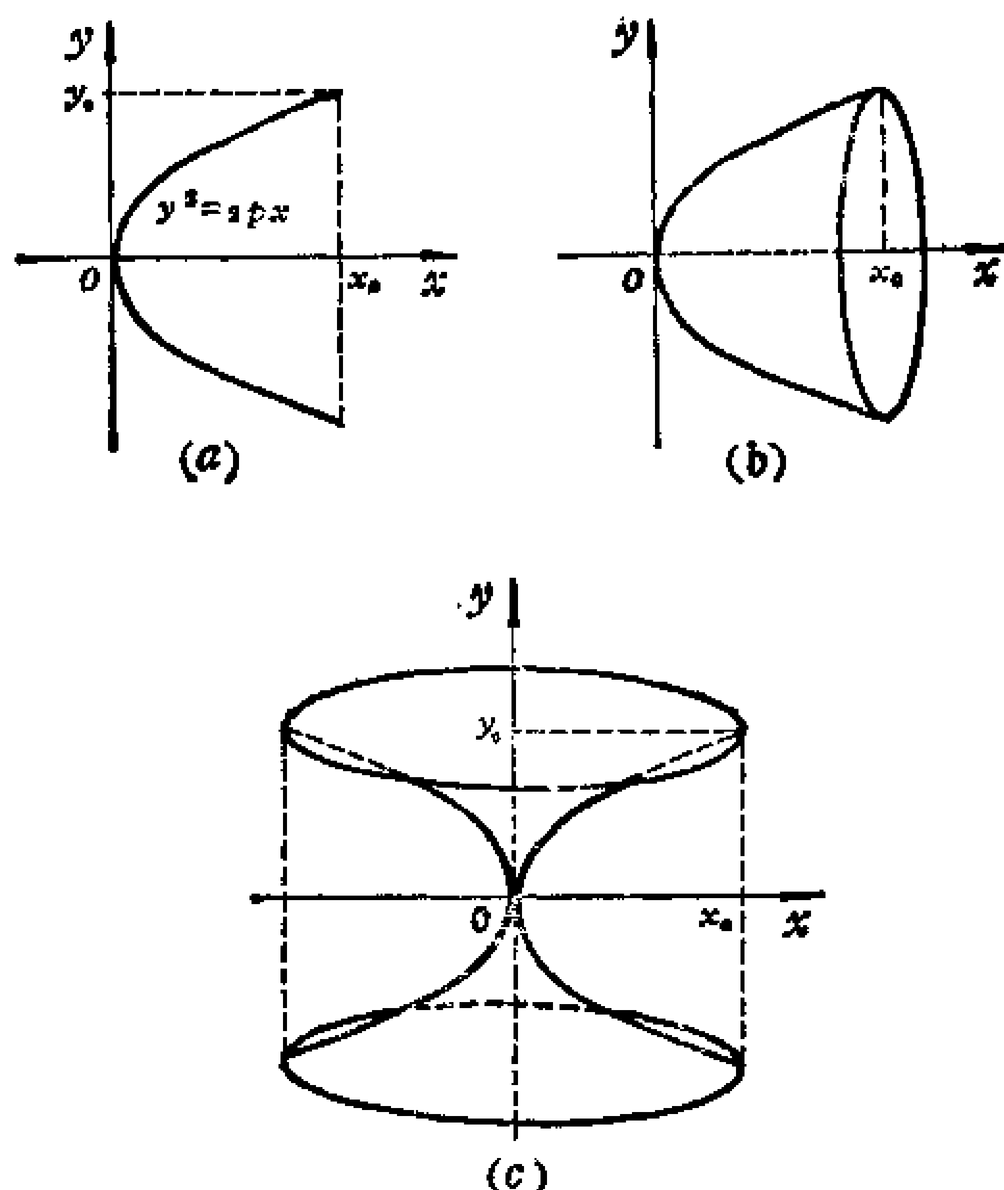


图10.46

$$S_x = 2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{P}{2x}}\,dx$$

$$= 2\pi\sqrt{P}\int_0^{x_0}\sqrt{2x+p}\,dx$$

$$= \pi\sqrt{P}\,\frac{2}{3}\,(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_0}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{P}}{3}[(2x_0+P)^{\frac{3}{2}}-P\sqrt{P}]。$$

（2）利用公式（10.15）得

$$S_y = 2\pi\cdot 2\int_0^{y_0}\frac{y^2}{2p}\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}dy$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\int_0^{y_0}y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\int_0^{x_0}2px\sqrt{p^2+2px}\,\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{x_0}\sqrt{x(2x+p)}\,dx$$

$$= 2\pi\left[\left(x+\frac{P}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}-\frac{p^2}{16}\ln\left|x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{P}{4}+\sqrt{x^2+\frac{P}{2}x}\right|\right]\Big|_0^{x_0}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(4x_0+p)\sqrt{2x_0(2x_0+p)}\right.$$

$$\left.-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{P}}\right]。$$

抛物线 $y^2=2px$，（1），（2）的图形如图 10.46(a)，(b)，(c)示。

例10 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$：（1）绕 ox 轴；（2）绕 oy 轴；（3）绕直线 $y=2a$ 旋转一周所形成的曲面面积。

基本思路 利用公式（10.15），（10.16）。

解 （1）因为

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=a\sin t,$$

所以应用公式（10.16），得

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+a^2\sin^2 t}\ dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{1+\left[\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right]^2}\,dt$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1+\mathrm{ctg}\frac{2t}{2}}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=8\pi\ {}^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du$$

$$=16\pi a^2\left[-\cos u+\frac{1}{3}\cos^3 u\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

（2）此种情形比较复杂，我们还是从公式(10.5)入手（如图 10.47），将摆线分成 x_1 和 x_2 两段，且将 y 看成自变量，那么 x_1 和 x_2 绕 oy 轴旋转一周所形成的曲面面积为

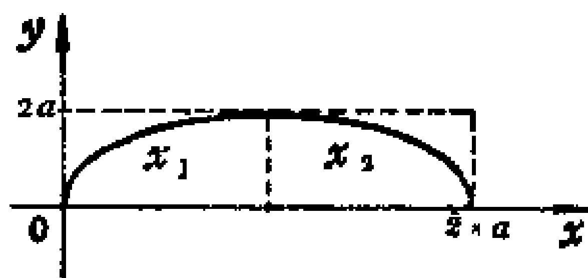


图10.47

$$S_y=2\pi\int_0^{2a}x_1\sqrt{1+\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$+2\pi\int_0^{2a}x_2\sqrt{1+\left(\frac{dx_2}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}\left[x_1\sqrt{1+\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2}\right.$$

$$+ x_2\sqrt{1+\left(\frac{dx_2}{dy}\right)^2}\Bigg]dy.$$

另外，因为 $x_1 = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$，且 $x_2 = 2\pi a - x_1 = 2\pi a - a(t-\sin t)$，所以有

$$\frac{dx_1}{dy} = \frac{a(1-\cos t)}{a\sin t} = \mathrm{tg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{dx_2}{dy} = \frac{-a(1-\cos t)}{a\sin t} = -\mathrm{tg}\frac{t}{2},$$

$$dy = a\sin t dt.$$

代入上式，于是得

$$S_y = 2\pi\int_0^{\pi}\left[x_1\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}} + x_2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}\right]a\sin t dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}[x_1+x_2]\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}a\sin t\, dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}2a\pi\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}\ a\sin t dt$$

$$= 4\pi^2a^2\int_0^{\pi}2\sin\frac{t}{2}dt = 16\pi^2a^2.$$

（3）这种情况实际上是将 x 轴往上平行 $2a$，在使用公式（10.16）时，只须注意，此时 $y = 2a - a(1-\cos t)$，于是有

$$S_{2a} = 2\pi\int_0^{2\pi}[2a - a(1-\cos t)]$$

$$\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\frac{t}{2}}\,a(1-\cos t)dt$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\csc\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2\left[-\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

例11　求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$：（1）绕极轴；

（2）绕轴 $\theta=\frac{\pi}{2}$；（3）绕轴 $\theta=\frac{\pi}{4}$旋转一周所形成的曲面面积。

基本思路 利用公式（10.17）并且应用坐标变换。

解 （1）因为图形是对称的，所以应用公式(10.17)，得

$$S_{\theta=0}=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta,$$

由于

$$\rho^2+\rho'^2=a^2\cos 2\theta+\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{a^2}{\cos 2\theta},$$

因此有

$$S_{\theta=0}=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho\sin\theta\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta$$

$$=4\pi a^2[-\cos\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

（2）因为绕轴 $\theta=\frac{\pi}{2}$旋转，在直角坐标系中就是绕 oy 轴旋转，所以函数 $x=\rho\cdot\cos\theta$，于是有

$$S_{\theta=\frac{\pi}{2}}=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho\cos\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2.$$

（3）因为以 $\theta=\frac{\pi}{4}$为新的极轴，所以将极坐标方程旋转 $\frac{\pi}{4}$得

$$\rho_1^2=a^2\cos 2\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)=-a^2\sin 2\theta_1\quad \theta_1\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right],$$

于是有

$$S_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 2\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\rho_1\sin\theta_1\sqrt{\rho_1^2+\rho_1'^2}\,d\theta_1$$

$$= 4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\rho_1\sin\theta_1\frac{a}{\sqrt{-\sin 2\theta_1}}\,d\theta_1$$

$$= 4\pi a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta_1 d\theta_1 = 4\pi a^2.$$

例12　C-6-30 型车床的床头箱中采用了摩擦离合器，它是利用在摩擦片上所产生的摩擦力矩带动主轴转动。离合器由 $2n$ 个摩擦面所组成（即用图10.48的（a）型片 $n+1$ 个，（b）型片 n 个，间隔的串在一起）， 设摩擦片的内外半径分别为 R_1 和R_2，片上的均匀压强为P，片的摩擦系数为 μ ，求离合器的摩擦力矩。

基本思路　利用微元法建立摩擦力矩的微元，然后积分。

解　根据物理学的知识我们知道：

摩擦力矩 = 摩擦力 × 力臂；

摩擦力 = 摩擦系数 × 压强 × 面积，

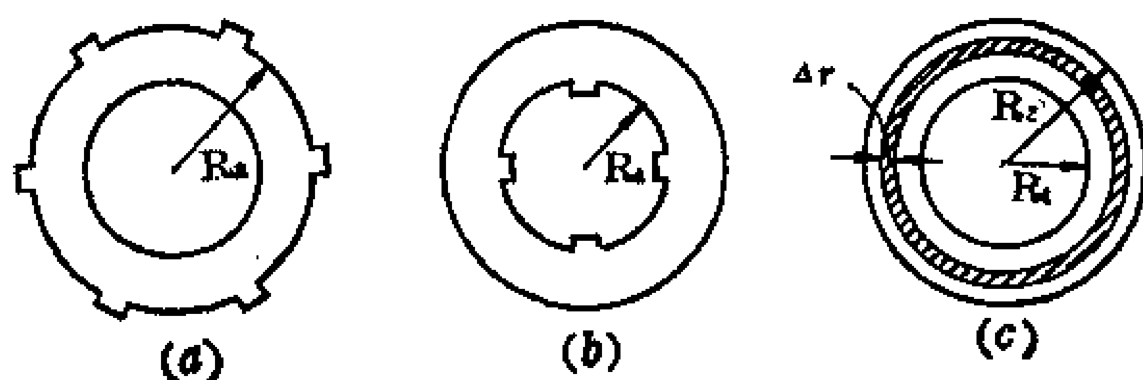


图10.48

然而在离合器上所表现的力臂和面积是半径 r的函数，为此，如图10.48(a)示，我们应用微元法来解决。不难建立摩擦力矩的微元 dW

$$dW = \mu\cdot p\cdot(2\pi r\cdot\Delta r)\cdot r,$$

亦即

$$dW = \mu p 2\pi r^3 dr,$$

于是，一个摩擦面的摩擦力矩为

$$W_1 = \int_{R1}^{R2} \mu p 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3}\pi\mu p(R^3_2 - R^3_1).$$

而 $2n$ 个摩擦面的总摩擦力矩为

$$W_{2n} = \frac{4}{3}\pi n \mu p(R^3_2 - R^3_1).$$

特别地，当 $n=8$，$\mu=0.2$，$p=0.5$公斤/厘米^2，$R_1=2$厘米，$R_2=5$厘米时，则有

$$W_{16} = \frac{4}{3}\pi\cdot 8\cdot 0.2\cdot 0.5(5^3-2^3) \doteq 400\text{公斤·厘米}.$$

物体转动是物体运动的一种重要形式。在研究物体转动时，转动惯量 $I = mr^2$ 表明了物体在转动过程中的一种固有的属性，即惯性。其中 m 是物体的质量，r 是物体到转轴的距离。对 n 个质点组的转动惯是由

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

来表示。

然而，对于质量是连续，且均匀分布的物体，求其绕某个轴的转动惯量，上述公式就不适用了，必须研究新的方法，

例13　求空心圆柱体绕中心轴 AB的转动惯量。其尺寸如图10.49示，单位为厘米，比重 $\mu=7$克/厘米^3.

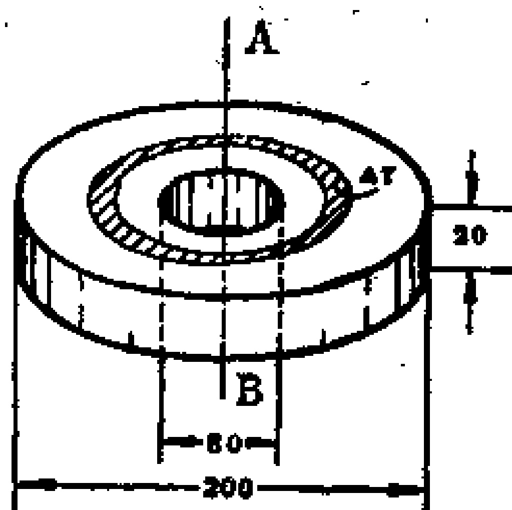


图10.49

基本思路　利用微元法建立空心圆柱体的转动惯量微元，然后积分，

解　在空心圆柱体内取体积微元

$$dv = 2\pi r\cdot\Delta r\cdot 20 = 40\pi r\Delta r,$$

它是以 r 为内径以 $r+\Delta r$ 为外径的薄壁圆筒．因为物体的比重等于体密度乘上重力加速度 g，所以薄壁圆筒的质量为

$$dm=40\pi r\Delta r\cdot\frac{\mu}{g},$$

而薄壁圆筒对中心轴 AB 的转动惯量微元是

$$dI=dm\cdot r^2=\frac{\mu}{g}40\pi r^3\Delta r,$$

亦即

$$dI=\frac{\mu}{g}40r^3dr,$$

于是，空心圆柱体对中心轴 AB 的转动惯量为

$$I=\int_{40}^{100}\frac{\mu}{g}40r^3dr=\frac{\mu}{g}\ 40\pi\frac{r^4}{4}\Big|_{40}^{100}$$

$$=\frac{40\pi\cdot 7}{980\cdot 4}\cdot(100^4-40^4)\doteq 218.6\times 10^5\ (克\cdot厘米^2).$$

特别地，半径为 R，面密度为 ρ 的薄圆盘对中心的转动惯量，由微元

$$dI=dm\cdot r^2=\rho\cdot 2\pi rdr\cdot r^2=\rho\cdot 2\pi r^3dr$$

给出，于是

$$I=\int_0^R\rho\cdot 2\pi r^3dr=\frac{1}{2}\pi\rho R^4.$$

习　　题

§10.1

1．求下列曲线所围成的面积：

（1）$y=\sin x$，$y=0$，$x=0$，$x=\pi$；

（2）$y=x^3$，$y=2x$；

（3）$ax=y^2$，$ay=x^2$；

（4）$y=x$，$y=x+\sin^2x$　$(0\leqslant x\leqslant\pi)$；

（5）$y=e^x$，$y=e^{-x}$，$x=1$．

2. 求下列曲线所围成的面积：

(1) $x=2\cos t$, $y=4\sin t$;

(2) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$（星形线）。

3. 求下列曲线所围成的面积：

(1) $\rho=a\sin 3\theta$（$a>0$，三叶线，如图10.50示）；

(2) $\rho=2a(2+\cos\theta)$ $(a>0)$.

4. 证明：正抛物线拱的面积等于

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

其中 b为底，h 为拱的高（如图10.51）。

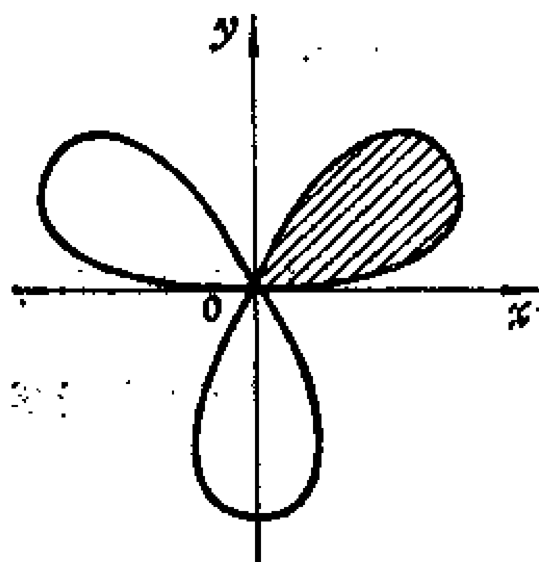


图10.50

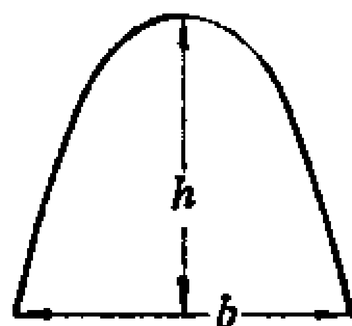


图10.51

§10.2

5. 求下列曲线的弧长：

(1) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ $(1\leqslant y\leqslant e)$;

(2) $y=\ln\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant a<\frac{1}{2})$;

(3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $\rho=a(1+\cos\theta)$;

6. 求下列曲线的曲率：

(1) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$;

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（星形线的直角坐标形式）；

（3） $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$；

（4） $\rho=a\theta$.

7．求下列曲线的曲率中心的坐标：

（1） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

（2） $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$.

§10.3

8 求旋转抛物体的体积，其底面为S，而高为H.

9．求下列曲线旋转所形成旋转体的体积：

（1） $y=2x-x^2$，$y=0$；1）绕 ox轴； 2）绕 oy轴；

（2） $y=\sin x$，$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$；1)绕 ox轴；2)绕 oy轴。

10．求下列曲线绕指定轴旋转所形成的曲面面积：

（1） $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$：绕 ox轴；

（2） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b\leqslant a)$：1)绕 ox轴；2)绕 oy轴；

（3） $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(a\leqslant b)$；绕 ox轴；

（4） $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$：1)绕 ox轴；2)绕 oy轴。

§10.4

11．某水库的闸门宽2米，高3米，当水平面与闸门顶一平时，求闸门所受的侧压力？其中水的比重 $\rho=1$吨/米^3.

12．如图 10.52示。有一截面为三角形的槽子，里面装满水，求水对槽子横头的侧压力？其水的比重 $\rho=1$吨/米^3.

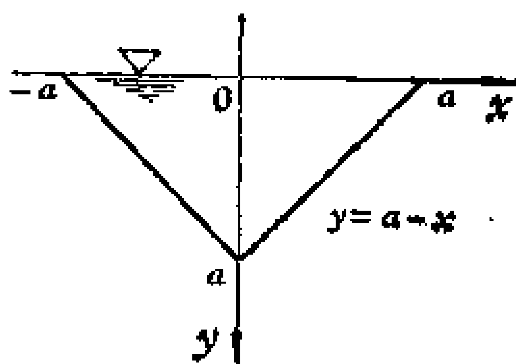


图10.52

13．直径为20厘米，长为80厘米的圆柱被压力为10千克/厘米^{2}的蒸气充满着，假定气体的温度不变，要使气体的体积减少一半，问需要花费多大的功？

14．求右半椭圆面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0)$的重心坐标。

15．某空气压缩机上的平衡铁如图10.53，求平衡铁的重心？长度单位为毫米。

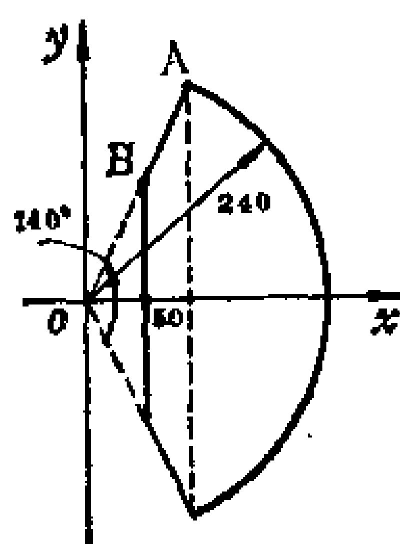


图10.53

§10.5

16．求下列函数在所给区间上的平均值：

（1）$f(x)\sqrt{x}$ 在〔0，100〕上；

（2）$f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在〔0，2π〕上；

（3）$f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在〔0，2π〕上；

（4）$v(t)=3t^2+2t$（米/秒）在〔0，3〕上。

17．已知半波整流后的交流电流为：

$$i(t)=\begin{cases}I_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2},\\ 0, & \frac{T}{2}t<\leqslant T,\end{cases}$$

求在一周期T内 $i(t)$ 的平均值，如果 $I_m=2$，$R=10$．问电流 $i(t)$ 在同一周期 T内消耗在电阻R上的平均功率是多少？

习题答案及提示

第一章

§1.2

1. (1) $-\frac{1}{3}<x<7$;　　(2) $x<-2$, $x>-1$;

(3) $x<-\frac{1}{2}$;　　(4) $0<x<\frac{2}{3}$;

(5) $-\frac{5}{2}<x$;　　(6) $1<x<2$.

2. (1) $\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$;　　(2) $\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}$;

(3) $\{x\mid x=-\frac{1}{2}\}$;　　(4) $\{x\mid x=2n\pi-\frac{\pi}{2},\ n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$;

(5) $\{x\mid x=-1, 3\}$.

3. 提示：参考绝对值性质 4 的证法，并注意 $-b<|a|$ 和 $b<|a|$ 就有 $|b|<|a|$ 的事实.

§1.3

4. (1) $-1\leqslant x\leqslant 1$;　　(2) $\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$;

(3) $2<x$;　　(4) $x<2$, $3<x$;

(5) $1\leqslant x\leqslant 4$;　　(6) $0\leqslant x\leqslant \pi$, $-4\leqslant x\leqslant -\pi$;

(7) $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant (2k+1)^2\pi^2$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$;

(8) $1\leqslant x\leqslant 100$.

5. (1) $f(-2)=-4$, $f(0)=2$, $f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$,

$$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1};$$

(2) $f(2)=1$, $f(-2)=\frac{1}{16}$, $f(0)=\frac{1}{4}$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{2}$;

(3) $f(x+\Delta x)-f(x)=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$;

（4） $f(-2)=5$，$f(-1)=2$，$f(0)=-1$，$f(1)=0$，

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

6. （1） $x=0,2$；$x=-1,3$；

（2） $x\leqslant -1$，$x\geqslant 2$。

§1.4

8. （4） 提示，要区别 $x^{\frac{1}{2}}$ 与 $x^{\frac{2}{4}}$。

§1.5

9. （1） 偶；（2）非奇非偶；（3）非奇非偶；（4）奇；（5）偶；（6） 偶。

10. （1）非周期函数；（2）周期函数，$T=4$；（3）周期函数，$T=2\pi$；（4）周期函数，$T=\pi$；（5） 周期函数，$T=1$；（6）周期函数，$T=\frac{2\pi}{n}$。

11. （1）严格递增；（2）严格递减；（3）不增；（4）摆动。

12. （1）有界；（2）有界；（3）有界；（4）无界。

13. 提示：利用有理数加上有理数等于有理数，无理数加上有理数等于无理数。

14. 提示：不等式 $n<n+1$ 和 $n^2+2n<n^2+2n+1$ 对任意的 n 都成立。

§1.6

15. （1） $y=\pm\sqrt{x^2-1}$； （2） $y=\log_2\frac{x}{1-x}$；

（3） $y=\dfrac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}$；（4） $y=10^{x-1}-2$；

（5） $y=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$， $y=\dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$，

（6） $y=\sqrt{1-x^2}$， $y=-\sqrt{1-x^2}$。

17. （1） $f(x+1)=\dfrac{-x}{2+x}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$，

（2） $f(e^{-x})=e^{-2x}[\ln(1+e^x)-x]$；

（3） $f(x)=x^2-5x+6$，（4） $f(x)=x^2-2$。

18. （1）$[-1, 1]$；（2）$[2n\pi, (2n+1)\pi]$，$n=0, \pm1, \pm2\cdots$；

（3）$[-a, 1-a]$；（4）若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，定义域是$[a, 1-a]$，若 $a>\frac{1}{2}$，定义域不存在。

§1.7

19. 提示：利用公式 $a_n-b_n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，考察 $x_2^{2n}-x_1^{2n}>0$，$x_2>x_1$ 且有 $x_1, x_2\in[0, +\infty)$。

20. 提示：令 $\arcsin x=\alpha, \arccos=\beta$，只须证明 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

21. 提示：利用等差数列的通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

证明 $y_{n+1}-y_n=a\cdot(x_2-x_1)$.

22. 提示：(1)是关于 x 轴对称，(2)是关于 y 轴对称，(3)是关于原点对称。

第二章

§2.1

3. (1)提示：参考本章例题选讲的例1；

(2)提示：参考本章例题选讲的例5；

提示：令 $|q|=\frac{1}{a}$，$a>1$。

§2.2

4. 提示：考虑 a_n-p，再利用定理2.2.

5. 提示：参考本章例题选讲的例20.

6. （1）$-\frac{1}{5}$　　（2）$\frac{1}{2}$；

（3）　0；　　（4）$\frac{1}{2}$；

（5）　0；　　（6）$\frac{1}{7}$；

（7）$\frac{1-b}{1-a}$，提示：利用等比数列的前 n 项和公式。

（8）$\frac{1}{3}$，提示：参考§2.2的例5；

(9) $\frac{1}{6}$，提示：$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$；

(10) $\frac{1}{8}$；

(11) 3，提示：令 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$；

而 $2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，　$2S_n-S_n=S_n=1+1+\frac{1}{2}$

$+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$；

(12) $\frac{4}{3}$，提示：利用　$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}.$$

§2.3

11．(1) 提示：证明 $\{x_n\}$ 是严格递增且有上界；

(2) 提示：证明 $\{x_n\}$ 是严格递增且有上界，要利用

$$\frac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)}<\frac{1}{2^n};$$

(3) 提示：证明 $\{x_n\}$ 严格递减且有下界．要利用 $\sin x<x$，当 $0<x<1$时．

12．提示：参考本章例题选讲的例14．

13．提示：参考本章例题选讲的例16．

14．提示：参考本章例题选讲的例17．

15．提示：参考本章例题选讲的例18．

16．提示：用单调有界定理证明存在性；用反证法证明唯一性．

17．提示：参考本章例题选讲例 12 的证明过程．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{3}$

18．提示：参考本章例题选讲例13的证明过程．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt[3]{4}$．

19．(1) 收；　(2)收；　(3)收；　(4)发

§2.4

20．(3)　提示：要限定$x>1$；

(4)　提示：限定 $x<-3$，则同时有 $-4x^5-4(x^2+1)>0$和 $x^2+5<2x^2$；

(5)　提示：限定 $|x|<\frac{1}{3}$，有 $|-15x+25|>20$；

(7) 提示：限定 $-1<x<0$，有 $-x^3+2>2$。

22. (1) 存在；(2) 存在；(3) 不存在；

(4) 不存在。

23. (1) k；(2) 1；(3) 0；(4) 0。

§2.5

24. (1) $\frac{11}{32}$；(2) $\frac{1}{3}$；(3) $\frac{3}{8}$；(4) $-\frac{9}{4}$；(5) 0；

(6) 8；(7) $-\frac{1}{2}$；(8) $\frac{1}{2}$；(9) $\frac{1}{4}$；(10) -2；

(11) -1；(12) $\frac{1}{2}$；(13) -1；(14) 1.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时，}\\ 0, & \text{当 } n<m \text{ 时。}\end{cases}$

26. $a=2$. 提示：利用左、右极限存在且相等来确定 a。

27. 提示：用反证法，不能断定 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ 是否存在。事实上：

若 $f(x)=x$，$g(x)=\sin\frac{1}{x}$，$a=0$，显然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，可是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot(gx)$

$=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 存在。

若 $f(x)=x$，$g(x)=\frac{1}{x^2}$，$a=0$，显然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 不存在，可是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在。

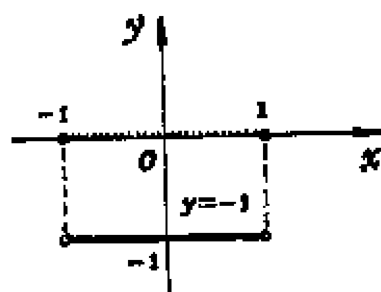


图2.14

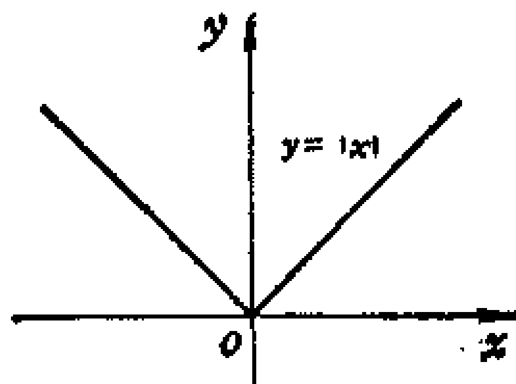


图2.15

28．不一定。

29．如图2.14和图2.15示。

§2.6

30．（1）$\frac{2}{5}$；（2）-1；（3）$\frac{1}{2}$；（4）1；

提示：令 $y=\operatorname{arctg}x$；

（5）12，提示：在分子上加1减1；

（6）3，提示：利用等式：

$$1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}$$
$$=1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}$$
$$=(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})$$
$$=(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})；$$

（7）$\sin 2a$；提示：$\sin^2 x-\sin^2 a=(\sin x+\sin a)(\sin x-\sin a)$；

（8）e^3；（9）$e^{-\frac{1}{2}}$；（10）e^2；（11）e^{4m}；（12）e^{-1}。

31．提示：参考定理2.18下面的对比表。此时取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$x'=\frac{1}{n}$，$x''=\frac{1}{n+1}$。

32．提示：叙述柯西收敛准则可参考定理2.9.

（1）可参考§2.6中的例7的证法；

（2）对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式（当 $|x_1|<|x_2|$）：

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1}-\frac{\sin x_2}{x_2}\right|<\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}<\frac{2}{|x_1|}<\varepsilon.$$

§2.7

34．（1）20；（2）1；（3）$\frac{1}{2}$；（4）2.

35．（1）2；（2）1.

36．（1）3；（2）$\frac{3}{2}$.

37．（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{4}$.

§2.8

38．提示：参考§2.8的例2和例题选讲中例24。

39．提示：参考§2.8的例1。

40．提示：首先证明奇偶子列不收敛于同一极限，其次应用海涅定理的必要性证明之。

第三章

§3.1

1．提示：利用 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。

3．（1） 连续；（2） 间断；（3）都间断，提示：用 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$。

4．$a=1$时，函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续。

5．提示：参考本章例题选讲中的例 4．

§3.2

6．（1） $x=-4$为可去间断点，补充定义 $f(-4)=-8$；

（2） $x=0$ 为可去间断点，改变定义 $f(0)=2$；

$x=\frac{1}{4}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类间断点；

（3） $x=0$为可去间断点，补充定义 $f(0)$　0；

（4） $x=1$为第一类间断点；

（5） $x=k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为第一类间断点；

（6） $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为第一类间断点，$x=0$为第二类间断点；

（7） $x=0$ 为第一类间断点；

（8） $x=1$ 为第一类间断点。

7．（1） $y=\begin{cases}1, & x=k\pi,\\ 0, & x\neq k\pi,\end{cases}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，

故当 $x=k\pi$ 时为第一类间断点；

（2） $y=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ 故函数为处处连续。

§3.3

8．提示：参考定理2.12。

9．提示：参考定理2.13．

10．提示：在 $[a,\ +\infty)$上构造一个闭区间 $[a,\ M]$ 在 $[a,M]$ 利

用有界性定理，在 $[M, +\infty)$ 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

11．提示：在间断点处将 $[a,b]$ 分成有限个闭区间，在每个闭区间上应用有界性定理，再以有限个当中选出最大者

12．提示：参考§3.3的例2．

13．提示：参考本章例题选讲的例14之（1）．

14．提示：设 $F(x)=f(x+l)-f(x)$，并将函数 $F(x)$ 在 $[0, 1-l]$ 上应用零点定理。

§3.4

15．提示：设 $h(x)=f_1(x)+f_2(x)$．若在点 x_0 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 之一者为不连续的，则 $h(x)$ 一定不连续，用反证法来证明；若在点 x_0 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都不连续，而 $h(x)$ 又有连续的可能，如：$f_1(x)=\mathrm{sgn}x$，$f_2(x)=-\mathrm{sgn}x$，$h(x)\equiv 0$，在 $x=0$ 处当然连续。

16．提示：证明 $x=0$ 为第一类间断点；连续区间为：$[-3, 0)$ 与 $(0, 3]$。

17．$x=1$ 时函数连续；$x=0$ 时函数也连续，利用 $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=f(0)$。

18．提示：利用 $y=u^2$，$u=f(x)$；$y=|u|$，$u=f(x)$。

§3.5

19．因为函数 $f(x)$ 的定义域由孤立点 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$ 组成，故函数 $f(x)$ 不存在连续区间。

20．（1） 0， 提示：利用和差化积公式；

（2） -2，提示：$\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}=\dfrac{1+\dfrac{100}{x^2}}{100+\dfrac{1}{x^2}}$；

（3） $\frac{3}{2}$，提示：$\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

$+\frac{1}{2}\ln x$；

（4） $\left(\frac{a}{b}\right)^2$，提示：$\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\left[\dfrac{\ln\cos ax}{(ax)^2}\right.$

$\left.\cdot\dfrac{(bx)^2}{\ln\cos bx}\right]$；

（5） $\frac{2}{3}$，提示：$\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}=1+\frac{x(2^x-3^x)}{1+x\cdot 3^x}$；

（6） 1，提示：将$\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$的分子分母同用 x 除；

（7） $\ln x$，提示：$(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$；

（8） $\sqrt{ab}$，提示：$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}=1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}$；

（9） $-\frac{\pi}{2}$，提示：因 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{(x-2)^2}=-\infty$；

（10） $-\ln 2$，提示：因$\log_x 2=\frac{\ln 2}{\ln x}$，再令 $y=x-1$。

第四章

§4.2

1.（1） 5；（2） 4.1；（3） 4.01；（4） $4+\Delta x$；（5） 4。

2．$f'(5)=10$，$f'(-2)=-4$，$f'(x_0)=2x_0$。

3．（1） $3x^2$；（2） $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$；（3） $-\sin x$；

（4） $\frac{1}{\cos^2 x}$；（5） $a^x\ln a$。

5．提示：把分式$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$的分子分母同除 x，再利用导数定义。

§4.4

6．（1） $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$；（2） $S'=\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$；

（3） $\rho'=\varphi\cos\varphi$；

（4） $y'=\frac{(1+\operatorname{tg}x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}$；

（5） $y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$；

（6） $y'=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$；（7） $y'=\operatorname{sgn}(x-1)$，$x\neq 1$；

(8) $y' = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$. (9) $S' = -\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$;

(10) $y' = (x-c)(x-d)(2x-a-b) + (x-a)(x-b)(2x-c-d)$;

(11) $y' = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$; (12) $y' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$;

(13) $y' = \frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$, (14) $y' = \frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$;

(15) $y' = (x\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$;

(16) $y' = \frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{3}\csc^2\frac{x}{2}$;

(17) $y' = \frac{2x}{1+x^4}$; (18) $y' = \sec^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)$.

7. (1) $f'(9) = 3\cdot 9^2$; $f'(25) = 3\cdot(25)^2$; $f(36) = 3\cdot(36)^2$;

(2) $f'(3^2) = 3\cdot(3^2)^2$; $f'(5^2) = 3\cdot(5^2)^2$; $f'(6^2) = 3\cdot(6^2)^2$;

(3) $f'(a^2) = 3(a^2)^2$; $f'(n^2) = 3(n^2)^2$; $f'(x^2) = 3(x^2)^2$.

8. (1) $y' = \frac{2-2x+3x^2-x^3}{e^x}$; (2) $y' = 3x^2 - 3^x\ln 3$;

(3) $y' = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$;

(4) $y' = \sin x\operatorname{arctg} x + x\cos x\operatorname{arctg} x + \frac{x\sin x}{1+x^2}$;

(5) $y' = -\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(6) $y' = -\frac{x+\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $y' = \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x>0)$;

(8) $y' = n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$;

(9) $y' = \operatorname{sgn}\cos x$, $\left(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\right)$;

(10) $y' = -2xe^{-x^2}$;

(11) $y' = [2\sin((x+\sin x)^2)\cdot\cos((x+\sin x)^2)]\cdot 2(x+\sin x)$
$(1+\cos x)$;

(12) $y' = (2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x^2 \cdot \sin^2 x^2)$
$+ (2x\cos x^2 \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 x^2)$
$+ (4x \cdot \cos x^2 \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 x^2)$;

(13) $y' = \cos(x^2 + \sin(x^2 + \sin x^2)) \cdot [(2x + \cos(x^2 + \sin x^2)$
$\cdot (2x + 2x\cos x^2))]$;

(14) $y' = \cos\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)}\right) \cdot$

$$\cdot \frac{3x^2 \sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{x^3}{\sin x}\right) \cdot \left(\frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)};$$

(15) $y' = \frac{-1}{6}\left(4\mathrm{ctg}\frac{x+1}{3}\csc^2\frac{x+1}{3} + 3x\csc^2\frac{x^2+1}{4}\right)$;

(16) $y' = \frac{2-3x^2}{2\sqrt{x^2-2x}(1-2x+x^3)}$;

(17) $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

(18) $y' = e^{-x}\arccos\frac{1}{x}\left[\frac{2}{x\sqrt{x^2-1}} - \arccos\frac{1}{x}\right]$;

(19) $y' = \frac{e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$; (20) $y' = \frac{-1}{\sqrt{2}\,(1+x)\sqrt{x-x^2}}$;

(21) $y' = -\mathrm{th}x$; (22) $y' = 10^{x\mathrm{tg}2x} \cdot \ln 10 \cdot (\mathrm{tg}2x + 2x\sec^2 2x)$;

(23) $y' = \mathrm{th}^3 x$; (24) $y' = \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

(25) $y' = \frac{7}{8}\frac{1}{\sqrt[8]{x}}$; (26) $y' = \frac{-1}{1-x^2}$;

(27) $y' = \frac{(2x+3)^3}{6\sqrt[3]{(x+1)^4}\sqrt{x-6}}(50x^2 - 207x - 243)$;

(28) $y' = \frac{\sin 2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$;

(29) $y' = \frac{1}{2a}\left[\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{x}{(a+x)^2}\right]$;

(30) $y' = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$； (31) $y' = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$；

(32) $y' = 9x^2 \arcsin x$； (33) $y' = \frac{1}{x^3+1}$；

(34) $y' = (\arcsin x)^2 \ (|x|<1)$； (35) $y' = \frac{12x^5}{(1+x^6)^2}$；

(36) $y' = \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, \ k \text{ 为整数} \right)$；

(37) $y' = \frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x}$ $(\cos x \neq \cos a)$；

(38) $y' = \frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$；

(39) $y' = 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}, \ k = 0, 1, 2, \cdots \right)$；

(40) $y' = \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m(\arcsin x)} \cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$；

(41) $y' = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$ $(x \neq 0)$； (42) $-\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$ $(x>0)$；

(43) $y' = -\frac{2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$ $(x \neq 0)$；

(44) $y' = \frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arcctg} a^{-x}$ $(a>0)$。

§4.5

9. (1) $y' = -\frac{1}{x^2} 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \sec^2\frac{1}{x} \ln 2$；

(2) $y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x a^{a^x} \ln^2 a$；

(3) $y' = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}$ $(x>e)$；

(4) $y' = -\frac{\log_x^2 a}{x \ln a}$ $(x>0, \ x \neq 1)$；

(5) $y' = \sqrt{a^2+x^2}$；

(6) $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$, $(x>0)$；

(7) $y' = x^{x} \cdot x^{x}\left(\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$, $(x>0)$;

(8) $y' = 3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$;

(9) $y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$;

(10) $y' = \operatorname{th} x$; (11) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$;

(12) $y' = \dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

10. (1) $y' = \dfrac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$, $\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0$;

(2) $y' = \dfrac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$, $\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0$;

(3) $y' = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} \cdot \left[\dfrac{1}{\varphi(x)} \dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln\psi(x)\right]$;

(4) $y' = \dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} \dfrac{1}{\ln\varphi(x)} - \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \dfrac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$.

11. (1) $y'=0$，当 x 不为整数时；y 的导数不存在，当 x 为整数时。

(2) $y'=1$，当 x 不为整数时；y 的导数不存在，当 x 为整数时。

(3) $y'=0$，当 x 不为零时；y 的导数不存在，当 x 为零时。

12. 提示：利用复合函数的导数做，即令 $-x=t$，$f(x)=f(-x)=f(t)$。

13. 提示：利用导数定义和周期函数的定义做，并注意 $f(x+l+\Delta x) = f(x+\Delta x)$。

14. 50仟米/小时。

§4.6

15. 提示：(1)利用点 a 的左、右极限存在且相等，又等于该点的函数值 $h(a)=f(a)=g(a)$，说明函数 $h(x)$ 在点 a 处连续；(2)再证明函数 $h(x)$ 在点 a 处的左、右导数存在且相等。

16. 提示：参考例题选讲中的例9。

17. 提示：参考例题选讲中的例6。

18. 提示：从 $g'(a)$ 的定义开始，再利用极限的两边夹定理。

19. 提示：研究函数在 $x=0$ 处的左、右导数。

20. 提示：参考“几点说明”中引理后面的反例。

§4.7

21. 4；

22. （1） $dy=\dfrac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\quad |x|<|a|$；

（2） $dy=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$；

（3） $dy=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)dx$；

（4） $dy=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$；

（5） $dy=(ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx)dx$；

（6） $dy=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & -1<x<0;\end{cases}$$

（7） $dy=\dfrac{3\sin\ln(3x+1)^2}{3x+1}dx$；

（8） $dy=\left(\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\ln(x^3-2x+5)}\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}\right)dx$。

23. （1） $dy=vwdu+uwdv+uvdw$；

（2） $dy=\dfrac{wvdu+uvdw-2uwdv}{v^3}$；

（3） $dy=-\dfrac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$；

（4） $dy=\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$；

（5） $dy=\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$。

24. （1） 1.007（查表为：1.0066）；

（2） 0.4849（查表为：0.4848）；

（3） 0.8104弧度＝46°26′（查表为：46°24′）；

（4） 1.043（查表为：1.041）。

25.（1） 2.083（查表为：2.080）；

（2） 2.9907（查表为：2.9905）；

（3） 1.938（查表为：1.931）；

（4） 1.9954（查表为：1.9953）。

§4.8

26.（1） $y''=\frac{x(4+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；（2） $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)$；

（3） $y''=\frac{1}{x}, x>0$；（4） $y''=\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}, f(x)>0$；

（5） $y''=-\frac{2}{x}\sin\ln x,\ x>0$。

27.（1） $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2), y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$；

（2） $y''=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，

$$y'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)；$$

（3） $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$，$y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)$
$+e^xf'(e^x)$；

（4） $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$，$y'''=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-$
$-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$。

28.（1） 提示：$y=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$，$(x<1)$，

$$y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}，(x<1)；$$

（2） 提示：注意总结一般规律，

$$y^{(100)}=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x；$$

（3） 提示：因为$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$，

$$y^{(n)}=n!\left[(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]；$$

（4） 提示：注意总结一般规律，

$$y^{(n)}=\frac{e^x}{x^{n+1}}(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}n!x+(-1)^n n!);$$

（5） 提示： $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$,

$$y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

（6） 提示：利用积化和差公式，

$$y^{(n)}=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

§4.9

29. （1） $y_x'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ （$t\neq 2k\pi$，k 为整数）；

（2） $y_x'=\operatorname{sgn}t$ （$0<|t|<+\infty$）；

（3） $y_x'=\frac{3}{2}(1+t)$，（$t\neq 1$）； $y''_{x^2}=\frac{3}{4(1-t)}$；

$$y'''_{x^3}=\frac{3}{8(1-t)^3};$$

（4） $y'_x=-\operatorname{ctg}t$，（$t\neq n\pi$，$n=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，$\cdots$）；

$$y''_{x^2}=-\frac{1}{a}\csc^3 t;\quad y'''_{x^3}=-\frac{1}{a^2}\csc^4 t\cdot\operatorname{ctg}t;$$

（5） $y'_x=t$，$(f''(t)\neq 0)$； $y''_{x^2}=\frac{1}{f''(t)}$； $y'''_{x^3}=-\frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$.

30. 提示：不能用参数形式的普通公式做，因为当 $t=0$时，$\frac{dx}{dt}$不存在。应当直接用导数的定义做，但是要把Δx，Δy都用Δt的形式表示，再研究增量比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限。

第五章

§5.1

1. 提示：检验洛尔定理的条件，证明之。

2. 三个根．分别在(0, 1)，(1, 2)，(2, 3)内。

3. (2)提示：设 $f(y)=\ln y$，在区间〔1, $1+x$〕上应用拉格朗日定理。

(3)提示：参考§5.1中的例4。

4. 提示：参考本章例题选讲的例6。

5. 提示：利用已知条件 $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)=0$；根据归结原则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)}{\xi_{n+1}-\xi_n}=0$，其中 $\{\xi_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$；应用中值定理

$$\frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)}{\xi_{n+1}-\xi_n}=f'(x_n),\quad x_n\in(\xi_n,\ \xi_{n+1})；$$

再取极限。

6. 提示：在〔x_1, x_2〕上应用中值定理，并注意 $f'(x)$ 在〔a,b〕上有界。

7. 提示：参考本章例题选讲的例9。

8. 提示：利用柯西定理，设 $g(x)=\ln x$。

§5.2

9. (1) 1；(2) $\frac{2}{5}$；(3) 0；(4) 0；(5) $\frac{1}{3}$；

(6) e^{-1}；(7) e^{a}；(8) 2；(9) 1；(10) 1；

(11) 1；(12) $\frac{1}{e}$。

10. (1) 不是七种不定型；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在；

(3) 同上。

§5.3

11. $p_4(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$。

12. $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

$$e^{\sin x}=1-\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}-\frac{\sin^3 x}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{\sin^n x}{n!}$$
$$+o(\sin^n x)。$$

13. $x(1+x)^{\alpha}=x+\alpha x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{3}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$x^{n+1}+o(x^{n+1})$。

14. 提示：$f(2)=2$，$f'(2)=-1$，$f''(2)=2$，$f'''(2)=-3!$，

$$f^{(4)}[2+\theta(x-2)]=\frac{4!}{[1+\theta(x-2)]^{5}}.$$

$$\frac{x}{x-1}=2-(x-2)+(x-2)^{2}-(x-2)^{3}+\frac{(x-2)^{4}}{[1+\theta(x-2)]^{5}},$$

$0<\theta<1$.

15. (1) $\sqrt[3]{30}=3.10724$. 提示：令 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$；$\sqrt[3]{30}$

$=(27+3)^{\frac{1}{3}}=3(1+\frac{1}{9})^{\frac{1}{3}}$；因为误

差：$3\cdot|R_3|\leqslant 3\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{9}\right)^{4}=\frac{10}{9^{6}}=\left(\frac{10}{9}\right)^{6}\cdot10^{-5}<1.2\cdot10^{-5}$.

(2) $\sin18^{\circ}=0.3090$. 提示：令 $f(x)=\sin x$；$\sin18^{\circ}$

$=\sin\frac{\pi}{10}$；$|R_3|<4.05\cdot10^{-4}$.

16. (1) $\frac{1}{3}$；(2) 0.

第六章

§6.1

1. (1) y 在$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$内严格递增，在$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$内严格递减；

(2) y 在 $[0,100)$内严格递增，在$(100,\ +\infty)$内严格递减；

(3) y 在 $(0,\ +\infty)$ 内严格递增；

(4) y 在 $(-\infty,\ +\infty)$内严格递增。

2. (1) 在 $(-\infty,\ +\infty)$内有一个实根；

(2) 在 $(0,\ \sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3},\ e)$内各有一个实根。

3. 提示：参考本章例题选讲的例 1 .

4. 提示：设 $F(x)=f(x)-\varphi(x)$，利用 $F(a)=f(a)-\varphi(a)=0$，及讨论 $F'(x)$ 的符号。

§6.2

5. (1) $x=\frac{1}{2}$是极大值点，极大值是$\frac{9}{4}$；

(2) 因为函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增，故无极值；

(3) $x=1$是极小值点，极小值是0；

(4) $y'=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，$x=0$是稳定点；当 n 是奇数时，$x=0$是极大值点，极大值是1；当 n 是偶数时，不论 $x>0$ 还是$x<0$，$y'<0$，所以不取极值。

6. (1) $f(2)=2$ 是最小值，$f(10)=66$是最大值；

(2) $f(1)=2$ 是最小值，$f(0.01)=f(100)=100.01$ 是最大值；

(3) $f(-1)=3$ 是最大值，$f(1)=1$ 是最小值；

(4) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ 是最小值，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}$是最大值。

7. 设等腰三角形之腰长为 x，周长为 l，则面积为

$S=\frac{l-2x}{4}\sqrt{4lx-l^2}$；当正三角形面积为最大。

8. 设圆柱的底半径为 r，高为 H，则 $V=\pi r^2H$，由 $r^2+H^2=R^2$ 得 $V=2\pi H(R^2-H^2)$；所以当$H=\frac{R}{\sqrt{3}}$时体积为最大，$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$。

§6.3

9. (1) $f(x)$在 $(-\infty,0)$ 内上凸，在 $(0,+\infty)$ 内下凸，$(0,0)$ 是拐点；

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内下凸，无拐点；

(3) $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内上凸，在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内下凸，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 是拐点。

10. 提示：任取 x_1，x_2，x_3，令$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，对每一个

x_i $(i=1,2,3)$ 在点$\overline{x}$展成泰勒公式：

$$f(x_i)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x_i-\bar{x})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_i-\bar{x}),\quad i=1,$$

2，3。因为 $f''(x)=2a>0$，和 $(x_i-\bar{x})^2>0$，所以可得

$$f(x_i)>f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x_i-\bar{x}).$$

进一步可推得结论。

11．提示：利用定理6.5或定理6.6证均可。

12．（1） $x=-1$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线，$y=x-1$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线；

（2） $y=0$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线；无斜渐近线。

13．（1） 提示：解 $x=\dfrac{5y^2+2}{y^2-1}$，且 $\lim\limits_{y\to\infty}x=5$，因此 $x=5$ 为曲线垂直渐近线；

（2） 提示：解 $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$，且 $\lim\limits_{x\to\pm2}y=\infty$，因此 $x=2$，$x=-2$ 是曲线的垂直渐近线。

14．（1）

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	不存在	+	+	+
$f(x)$	↗上凸	极大	↘上凸	不属于定义域	↘下凸	极小	↗下凸

$x=-1$为 $f(x)$的垂直渐近线；$y=x-1$ 为斜渐近线．如图6.14示。

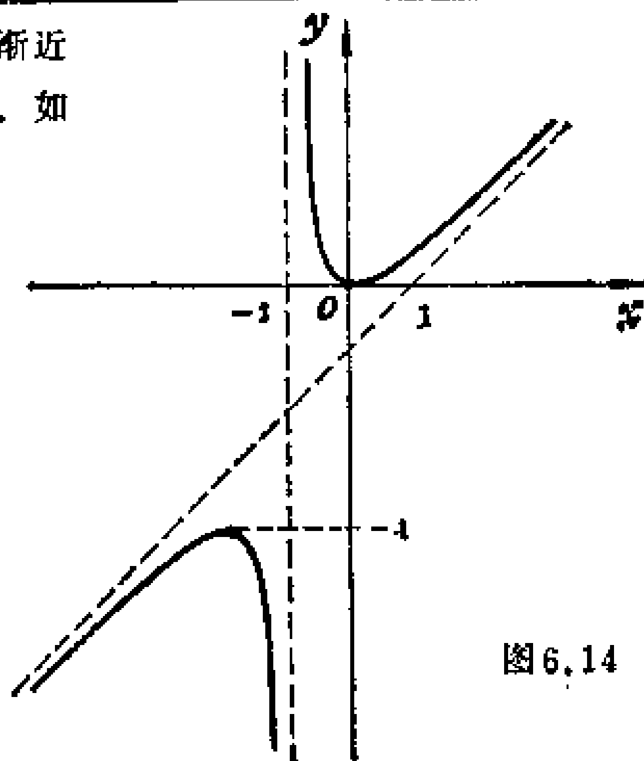


图6.14

（2）

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+	+	+
$f(x)$	↘下凸	拐点的横坐标	↘上凸	拐点的横坐标	↘下凸	极小	↗下凸

无渐近线、如图6.15示。

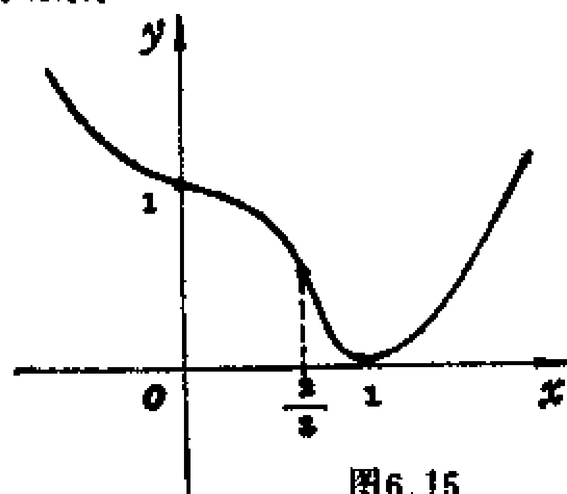


图6.15

（3） 由于函数是奇函数，故列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗上凸	极 大	↘上凸	拐点的横坐标	↘下凸

另外，点 (0,0) 也是拐点；$y=0$是水平渐近线。如图6.16示。

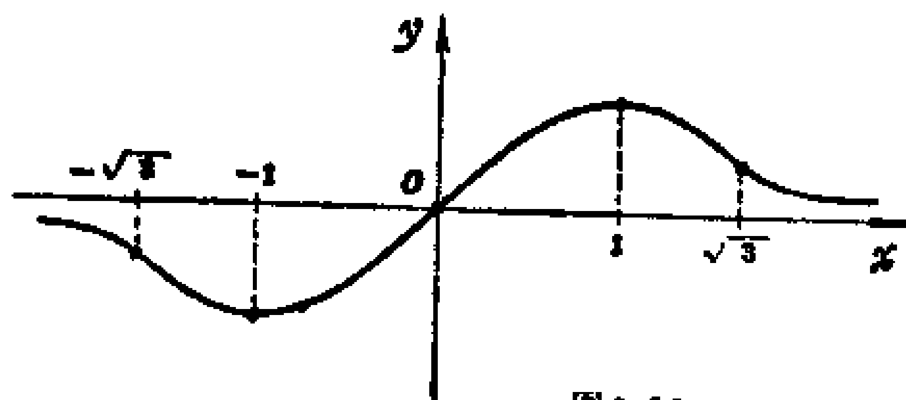


图6.16

第七章

§7.1

1. （1） 可构成；（2） 可构成；（3） 不能构成；（4） 不能构成。

2. 提示：（1） 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在；（2）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 相等，用反证法。

3. 提示：使用构造性证明。（1）将数列的所有项连同数列的上、下界与数轴上的点建立一一对应；（2）两等分以上、下界为端点的闭区间$[a,b]$，并将其含有数列无穷多个点的区间记为$[a_1,b_1]$，如此等等；（3）与此同时也构造子列；（4）属于闭区间套的实数 c 就是子列的极限。

4. （1） Δ 可被 Σ 覆盖，但不能有有限覆盖；（2） 不能覆盖；（3） 不能覆盖；（4） Δ 可被 Σ 覆盖，并有有限覆盖。

5. 提示：用反证法。构造出闭区间套，使函数 $f(x)$ 在闭区间套的所有闭区间上无界，再用闭区间套定理确定一点 ξ 属于所有闭区间，另外，由函数 $f(x)$ 的连续性，可构造一个邻域 $U(\xi,\delta)(\delta>0)$，使函数 $f(x)$ 在 $U(\xi,\delta)$ 上有界。于是对充分大的 n 将出现矛盾。

§7.3

6. （1） 一致连续；（2） 一致连续，提示：利用 $|\sin x_1-\sin x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|$。

（3） 一致连续；（4） 非一致连续，提示：见§7.3 的例 1。

（5） 一致连续；（6） 非一致连续，提示：取$x_1=n\pi-\frac{\delta}{3}$，$x_2=n\pi+\frac{\delta}{3}$，则有

$$|x_1\sin x_1-x_2\sin x_2|=\cdots=2n\pi\cdot\sin\frac{\delta}{3}>\varepsilon_0,$$

当 n 充分大时。

7. 提示：只要注意取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$即可。

8. （1） 提示：因为$\lim\limits_{x\to 0+0} x\sin\frac{1}{x}=0$；

（2） 提示：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$；

（3） 提示：因为 $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ 在$[1,+\infty)$上有界。

第八章

§8.2

1.

（1） $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$；（2） $\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot x+2\sqrt{x}+C$；

（3） $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$；（4） $x-\cos x-\ln|\cos x|+C$；

（5） $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$；（6） $\frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2}-2\frac{5^{-x}}{\ln 5}+C$；

（7） $\arcsin x+C$；（8） $\operatorname{tg}x-x$。

2.

（1） $\ln|x-a|+C$；（2） $\frac{1}{m}\sin mx+C$；

（3） $3\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x+1\right)+C$；（4） $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$。

§8.3

3.

（1） $\frac{1}{2\times101}(2x-3)^{101}+C$；

（2） $-\frac{2}{27}(4-3x^3)^{\frac{3}{2}}+C$， 提示：令 $t=4-3x^3$；

（3） $2\sqrt{\operatorname{arctg}x}+C$；（4） $-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$；

（5） $\frac{2^{2x-1}}{\ln 2}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{3^{2x}}{\ln 9}+C$；

（6） $\ln|x^2-3x+8|+C$；（7） $\frac{1}{11}\operatorname{tg}^{11}x+C$；

（8） $\ln|\ln(\ln x)|+C$；（9） $\ln|\ln\sin x|+C$；

(10) $-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$, 提示：令 $t=\sqrt{1+x^2}$，及注意§8.3的例6；

(11) $\frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\left(\frac{A}{B}\operatorname{tg}x\right)+C$，提示：在分母提出 $\cos^2 x$，化为 $\operatorname{tg}^2 x$ 型，令 $\operatorname{tg}x=t$；

(12) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x+C$，提示：令 $\sin^2 x=t$，或 $\sin x\cos x dx=d(\sin^2 x)$；

(13) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$，提示：因 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$；

(14) $-\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$；　(15) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$；

(16) $-\cos e^x+C$，提示：令 $e^x=t$；

(17) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$，提示：凑微分法 $dx^2=2xdx$；

(18) $-\frac{1}{2}[\ln(\cos)]^2+C$，提示：令 $\ln(\cos x)=t$；

(19) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$；　(20) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$；

(21) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$，提示：用 $\frac{1}{\cos x}=\sec x$，令 $\operatorname{tg}x=t$；

(22) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$，提示：凑分 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)$；

(23) $\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C$，提示：凑微分

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=d(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))；$$

(24) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C$，提示：变形：$\operatorname{tg}^4 x=(\sec^2 x-1)^2$，令 $\operatorname{tg}x=t$；

(25) $\operatorname{tg}x-\frac{2}{\cos x}+C$。

4.

(1) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$, 提示：令 $x=2\sec t$;

(2) $-2\cos\sqrt{x}+C$, 提示：令 $\sqrt{x}=t$;

(3) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$, 提示：令 $x=a\sin t$;

(4) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$;

(5) $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C$, 提示：令 $\sqrt{1+e^x}=t$;

(6) $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$, 提示：令 $\ln\frac{1+x}{1-x}=t$;

(7) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$, 提示：$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x-\frac{1}{x}\right)$;

(8) $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C$, 提示：令 $x=\frac{1}{t}$;

(9) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$, 提示：令 $\sqrt[3]{1+x^3}=t$;

(10) $\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C$, 提示：$x^2=1-2(1-x)+(1-x)^2$;

(11) $\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$;

(12) $\frac{1}{\ln 2}[2^x+x\ln 2-2\ln(2^x+1)]+C$, 提示：分子可变成：$4^x+1=(2^x+1)^2-2\cdot 2^x$.

5.

(1) $x\ln x-x+C$;　　(2) $\frac{1}{2}[x^2e^{x^2}-e^{x^2}]+C$;

(3) $2(x\sin x+\cos x)-x^2\cdot\cos x+C$;

(4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$;

(5) $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C$;

(6) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$, 提示：令$u=\arcsin x, v'=1$;

(7) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x}-\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$, 提示：令$u=\ln\sqrt{x}$, $v'=\sqrt{x}$;

(8) $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$, 提示：令$u=\cos(\ln x), v'=1$;

(9) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$, 提示：$u=x, v'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

(10) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$, 提示：令$u=(\arcsin x)^2$, $v'=1$;

(11) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$, 提示：令$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $v'=1$;

(12) $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$, 提示：令 $u=x$, $v'=\frac{1}{\sin^2 x}$.

6.

(1) $\operatorname{tg}x(\ln\cos x+1)-x+C$, 提示：用分部积分法，令 $u=\ln\cos x$, $v'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

(2) $\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)-x^2+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$, 提示：先换元后分部积分，令$x^2=t$; 令，$\ln(4+t^2)=u$, $v'=1$;

(3) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$, 提示：先三角代换后分部积分，令$x=a\sec t$; 令$u=\operatorname{tg}t$, $v'=\operatorname{tg}t\sec t$;

(4) $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$, 提示：使用分部积分，令

$u=\sqrt{a^2-x^2}$, $v'=\frac{1}{x^2}$;

(5) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$, 提示：用分部积

分，令 $u=\operatorname{arctg}x$，$v'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；

（6） $-\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})+C$，提示：先变形，后换元，令 $\cos2x+1=t$；

（7） x^x+C，提示：令 $x^x=t$；

（8） $\dfrac{1}{2}(1+x^2)\ \ln\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{4}+C$，提示：令 $u=\ln\sqrt{1+x^2}$，$v'=x$；

（9） $\dfrac{1}{2}f(2x)+C$，提示：令 $2x=t$；

（10） $f(x)=2\sqrt{x}$，提示：令 $x^2=t$。

§8.4

7.

（1） $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$；

（2） $\dfrac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{19}}+C$；

（3） $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$；

（4） $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$；

（5） $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+4\operatorname{arctg}x+C$；

（6） $\ln|x+3|+\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$；

（7） $\dfrac{\ln\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$；

（8） $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$。

8.

（1） $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$，提示：令 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$；

（2） $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$，提示：令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$；

（3） $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$，提示：令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$；

（4） $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3\cos^3x}+\frac{1}{\cos x}+C$，提示：令 $\cos x=t$；

（5） $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(2+\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^2}\right|+C$，提示：令 $\cos x=t$；

（6） $\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C$，提示：令 $\sin x=t$；

（7） $\frac{1}{6}\ln\frac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C$，

提示：令 $\operatorname{tg}x=t$。

（8） $\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C$，提示：先将 $\cos x\cdot\cos 3x$ 化为和差形，然后将 $\cos 2x\cos 4x$ 化为和差；

（9） $-\frac{1}{2}\cos a\cos(x+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)-\frac{1}{4}\cos(x+a-b)+C$，提示：同（8）。

（10） $\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4x}+\frac{15\sin x}{48\cos^2x}+\frac{15}{48}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$，提示：利用例题选讲中例12的递推公式。

（11） $\frac{1}{8}\sin x\cos^7x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3x$

$+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C$，提示：利用例题选讲中例11的递推公式；

9.

（1） $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$；

（2） $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$，提示：令 $\sqrt[4]{x}=t$；

（3） $6(1+x)^{\frac{1}{6}}-3(1+x)^{\frac{1}{3}}-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}+\frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{6}}$

$-\frac{6}{7}(1+x)^{\frac{7}{6}}+3\ln[1+(1+x)^{\frac{1}{6}}]-6\operatorname{arctg}(1+x)^{\frac{1}{6}}$

$+C$，提示：令 $(1+x)^{\frac{1}{6}}=t$；

（4） $-\frac{n}{a-b}\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}+C$，提示：令 $\frac{x-a}{x-b}=t$；

（5） $\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}|+C$，提示：用欧拉变换 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$；

（6） $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{8-3x}{5x}+C$，提示：用倒代换；

（7） $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$，提示：配成完全平方；

（8） $\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\ln|(x+\sqrt{x^2+x+1})^4(2x+1-2\sqrt{x^2+x+1})^3|+C$，提示：用欧拉变换 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$。

第九章

§9.1

1.

（1） 3，提示：$\Delta x_i=\frac{3}{n}$，$\xi_i=x_i=-1+\frac{3}{n}i$；

（2） $\frac{a-1}{\ln a}$，提示：$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$。

§9.2

2. 提示：参考本章几点说明的例1。

3. 不一定。提示：不可积的例子见本章例题选讲的例4。

§9.3

4.

（1） $\int_0^1 x\,dx>\int_0^1 x^2\,dx$；（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$；

（3）$\int_0^1 e^{-x}dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx$；（4）$\int_1^2 \ln x dx>\int_1^2(\ln x)^2dx$。

5.

（1）提示：因为 $\sin x\leqslant x$，即 $\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$；

（2）提示：因为$\frac{1}{1+x}\leqslant 1$。

6.

（1）提示：参考本章例题选讲的例13之（1）；

（2）提示：参考本章例题选讲的例13之（2）。

7.

（1）$6\leqslant\int_1^4(1+x^2)dx\leqslant 51$，提示：因为 $1\leqslant x\leqslant 4$，$1\leqslant x^2\leqslant 16$，$2\leqslant 1+x^2\leqslant 17$；

（2）$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x dx\leqslant\frac{2}{3}\pi$，提示：因为 $\operatorname{arctg}x$ 是 x 的严格递增函数．当$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$时，有$\frac{\pi}{6}\leqslant\operatorname{arctg}x\leqslant\frac{\pi}{3}$，故有$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\leqslant x\cdot\operatorname{arctg}x\leqslant\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}$。

§9.4

8.

（1）$\frac{1}{2}$，提示：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)$；

（2）$\frac{\pi}{4}$，提示：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$；

（3）$\frac{1}{p+1}$，提示：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]$。

9.

（1）$e^x(1+e^{2x})$；（2）$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$。

10. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. $y'_x=\operatorname{ctg}t$，提示：利用参数式求导公式。

12. 提示：只须证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=1.$$

13. 最大值 $=\dfrac{5\pi}{3\sqrt{3}}$，最小值 $=0$。

14. 提示：利用三角函数的积化和差公式以及积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0,\quad n\in N.$$

15. 提示：利用倍角公式以及上题提示的积分。

16.

(1) $a\left(a^2-\dfrac{a}{2}+1\right)$； (2) $4\dfrac{5}{6}$；

(3) $45\dfrac{1}{6}$； (4) $\dfrac{\pi}{3}$；

(5) 1； (6) $\pi-\dfrac{4}{3}$；

(7) $1-\dfrac{\pi}{4}$； (8) $\dfrac{1}{4}$.

§9.5

17.

(1) $\dfrac{3\pi}{16}$； (2) $2(2-\ln 3)$；

(3) $\dfrac{1}{6}$； (4) $\dfrac{a^4\pi}{16}$；

(5) 2； (6) $2-\dfrac{\pi}{2}$；

(7) $\dfrac{\pi}{12}$； (8) $\dfrac{8}{15}$；

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$； (10) $\dfrac{\pi^2}{4}$.

18.

（1） 不正确，提示：考虑定理9.18的条件（1）；

（2） 不正确。提示：考虑定理9.18的条件（2）。

19. 提示：令 $1-x=t$。

20.

（1） 0； （2） $\frac{\pi^2}{2}-4$； （3） 0；（4） $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$。

第十章

§10.1：

1.

（1） 2； （2） 2； （3） $\frac{a^2}{3}$；

（4） $\frac{\pi}{2}$； （5） $e+\frac{1}{e}-2$。

2.

（1） 8π；

（2） $\frac{3\pi a^2}{8}$， 提示：利用公式(10.5)，注 $\varphi'(t)$ 的符号及积分限的次序。

3.

（1） $\frac{\pi a^2}{4}$， 提示：因为 $\rho\geqslant 0$，所以 $\sin 3\theta\geqslant 0$，从而可确定 θ 的变化范围。

（2） $18\pi a^2$，提示：同（1）。

4. 提示：可用方程 $y^2=2px$ 来证，因为该抛物拱的面积与放置的位置无关。

§10.2

5.

（1） $\frac{1}{4}(e^2+1)$，提示：利用公式(10.7)，只须把 y 看成自变量。

（2） $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$；

（3） $8a$；（4） $8a$，提示：积分限是 0 到 π。

6．

（1） $\frac{a}{y^2}$；（2） $\frac{1}{3(axy)^{\frac{1}{3}}}$；（3） $\frac{1}{\left|4a\sin\frac{t}{2}\right|}$；

（4） $\frac{\theta^2+2}{a(\theta^2+1)^{\frac{3}{2}}}$。

7．

（1） $\xi=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3$，　$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3$；

（2） $\xi=a\cos t$，$\eta=a\sin t$，提示：利用公式（10.12），和参数方程的求导数方法。

§10.3

8．$V=\frac{SH}{2}$，提示：注意应用代换 $S'=\pi\cdot 2pH$，将体积公式中的 p 换掉。

9．

（1） 1) $\frac{16\pi}{15}$；　2) $\frac{8\pi}{3}$；　（2） 1) $\frac{\pi^2}{2}$；　2) $2\pi^2$。

10．

（1） $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$；

（2） 1) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$；

2) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$，其中的 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率；

（3） $4\pi^2ab$；

（4） 1) $\pi a\left(2b+a\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$；　2) $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}\right)$。

§10.4

11．9 吨，提示：建立坐标系，利用微元法。

12．$\frac{a^3}{3}$。

13. 1740（千克米），提示：参考§10.4的例4．

14. $\left(\frac{4a}{3\pi},0\right)$，提示：参考§10.4的例5．

15. $x_0=133$毫米，提示：（1）要建立 AB 的直线方程；（2）求A的横坐标；（3）分两段求面积矩。

§10.5

16.

（1）$\frac{20}{3}$；（2）10；（3）$\frac{\cos\varphi}{2}$；（4）12。

17. $\frac{I_m}{\pi}$；20.

后　记

本书是在总结我系本科和函授本科数学分析教学经验的基础上，参照教育部所制定的高师《数学分析教学大纲》编写的。全书分上、下两册。

本书的上册系统地介绍了极限理论、一元微分学、一元积分学和实数的一些基本定理。考虑到函授生、进修生和自学读者的需要，在每章末增编了学习指导。它包括：内容概要、几点说明和例题选讲。在内容概要中，既指出重点和要求，又概括地总结了主要内容，而且在形式上力求图形化；在几点说明中，对某些内容加以深化和扩充，将有助于读者对基本内容的理解和掌握；在例题选讲中，对常见的一些类型题和具有中等程度的典型题进行分析和详解，以培养读者分析问题和解决问题的能力。在学习指导的后面配有一定数量的习题，并在本册最后附有答案和提示。

参加本书上册编写的还有王凤阁、王淑兰、王大海。插图由陈广义绘制。

本书上册由刘玉琏副教授审定。

此外，辽宁大学数学系部分同志协助审稿，并提出一些很好的意见，在此致以谢意。

由于我们水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编者

1982年7月于长春

[General Information]
书名=数学分析　　（上册）
作者=
页数=656
SS号=0
出版日期=
Vss号=66724197